

Eichtheorien auf zeitartiger nicht-kommutativer Raumzeit: Streuquerschnitte und Ward-Identitäten

Diplomarbeit

von
Jörg Zeiner

vorgelegt bei

Prof. Dr. Reinhold Rückl

am

Institut der Theoretischen Physik und Astrophysik

der

Bayrischen Julius-Maximilians-Universität

Würzburg

August 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Formale Grundlagen	6
2.1	Stern-Produkt	6
2.2	Eichtransformation	9
2.3	Ward-Identität	11
2.4	Unitarität	12
3	Feynmanregeln	15
3.1	Vorbereitung	15
3.2	Bhabha-Streuung	16
3.3	Compton-Streuung	23
3.4	Vier-Photon-Vertex und Geist-Propagator	28
4	Wirkungsquerschnitte	32
4.1	Bhabha-Streuung	32
4.1.1	Summation über λ	33
4.1.2	Quadrierte Amplitude	36
4.1.3	Übergang in das Schwerpunkt-System	38
4.2	Møller-Streuung	40
4.3	Compton-Streuung	43
5	Ward Identität	50
6	Resultate	55
6.1	Beste Abschneideparameter	56
6.2	Totaler Wirkungsquerschnitt	58
6.3	Differentieller Wirkungsquerschnitt	59

6.3.1	Graphen über $\cos \vartheta$	60
6.3.2	Graphen über ϕ	61
6.4	Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie	62
7	Zusammenfassung	67
A	Compton-Streuung <i>ohne</i> Vertauschung	69
A.1	Mit Geist-Term	69
A.2	Ohne Geist-Felder	72
B	Compton-Streuung <i>mit</i> Vertauschung	74

Kapitel 1

Einführung

Andererseits halte ich die Theorie von der Kontinuität des Raums für falsch, weil wir immer wieder dieses Unendlich erhalten und zudem auf andere Schwierigkeiten stoßen; [...]. Ich vermute, dass sich die einfachen Begriffe der Geometrie nicht ohne weiteres auf den unendlich kleinen Raum übertragen lassen.

[RICHARD P. FEYNMAN: *Vom Wesen physikalischer Gesetze*]

Quantenfeldtheorien (QFTen) auf nicht-kommutativer (noncommutative, NC) Raumzeit sind eine sehr faszinierende Erweiterung des Standardmodells der Elementarteilchenphysik. Der Übergang von einer kommutativen hin zu einer nicht-kommutativen Raumzeit ist eine natürliche Fortsetzung dessen, was in den 20er Jahren des letzten Jahrhunderts der Übergang von der Mechanik hin zur Quantenmechanik war. Wie damals die kommutativen Größen, Ort und Impuls, zu Operatoren, also zu nicht-kommutativen Größen, wurden, werden bei nicht-kommutativen Theorien die klassischen Raumzeitkoordinaten zu Operatoren, deren Eigenwerte die entsprechenden Koordinaten sind. Diese Analogie kann man fortsetzen. Anstelle des Planck'schen Wirkungsquantums gibt es in nicht-kommutativen Theorien den Tensor $\theta^{\mu\nu}$, der die Skala angibt, bei der nicht-kommutative Effekte relevant werden. Und ebenso, wie in der Quantenmechanik aus der Vertauschungsrelation von Ort und Impuls die Heisenberg'sche Unschärferelation folgt, erhält man in nicht-kommutativen Theorien eine Unschärferelation, die den kleinstmöglich messbaren Abstand zweier Punkte in Raum und Zeit angibt.

Die Idee, Theorien auf nicht-kommutativer Raumzeit zu betrachten, geht bis zu Heisenberg zurück. Snyder versuchte 1947 in einer Veröffentlichung [1], die Divergenzen in Feldtheorien zu beseitigen, indem er eine quantisierte Raumzeit annahm. Er zeigte, dass es eine lorentzinvariante Theorie gibt, deren Ortskoordinaten hermitesche Operatoren sind. Mit diesem Vorgehen konnte er

einen Parameter mit der natürlichen Einheit einer Länge einführen, womit er einen inhärenten Abschneideparameter für die divergenten Integrale erhielt. Das Problem der Theorie war, dass sie nicht invariant unter Translation ist, was kontinuierliche Raumzeitkoordinaten voraussetzt. Yang [2] erweiterte diesen Ansatz, ebenfalls 1947, für eine gekrümmte Raumzeit.

Die Arbeiten zu QFTen auf nicht-kommutativer Raumzeit waren bis vor wenigen Jahren im Wesentlichen von der Vorstellung motiviert, eine Theorie zu entwickeln, deren Raumzeit quantisiert ist. Die Hoffnung war und ist, mit dieser Theorie einen Übergang zu einer gekrümmten Raumzeit zu vollziehen, um letzten Endes eine quantisierte allgemeine Relativitätstheorie (ART) bzw. eine Quantengravitationstheorie zu erhalten. Die Notwendigkeit, eine quantisierte ART einzuführen, kann man sich semiklassisch folgendermaßen veranschaulichen. Ein Teilchen in der kommutativen Feldtheorie wird als punktförmiges Objekt angesehen. Jedes Teilchen, das eine Masse besitzt, bildet somit in der ART formal ein Schwarzes Loch. Dieses Problem kann womöglich auf eine natürliche Weise durch eine nicht-kommutative Feldtheorie behoben werden, da wegen der Raumzeit-Unschärfe die Singularität für Massen, deren Schwarzschildradius kleiner oder gleich der nicht-kommutativen Skala ist, von dieser „verdeckt“ wird. Daraus folgt nicht notwendigerweise, dass dieses Problem nur durch eine nicht-kommutative Raumzeit gelöst werden kann, da eine quantisierte ART auf kommutativer Raumzeit sehr wohl, analog zur Quantenelektrodynamik, renormierbar sein kann. Das obige Beispiel zeigt dennoch anschaulich, dass eine nicht-kommutative Feldtheorie dieses divergente Verhalten der ART möglicherweise inhärent beseitigen könnte.

Das Interesse an Theorien mit nicht-kommutativer Raumzeit nahm 1999 nach der Veröffentlichung [3] von E. Witten und N. Seiberg stark zu, in der sie zeigten, dass nicht-kommutative Quantenfeldtheorien, mit ausschließlich Raum-Raum-Unschärfe, in der Superstring-Theorie eingebettet sind. Sie konnten zeigen, dass sich die Dynamik von Niederenergieanregung einer D-Brane in einem Hintergrund-Magnetfeld vollständig mit einer Quantenfeldtheorie auf nicht-kommutativer Raumzeit beschreiben lässt. Diese Entdeckung unterstützte natürlich den Gedanken, dass nicht-kommutative Quantenfeldtheorien eine natürliche und physikalisch sinnvolle Erweiterung des Standardmodells sind.

Jetzt stellt sich die Frage, wie man nun konkret eine Theorie auf nicht-kommutativer Raumzeit realisiert. Der konsequente Weg wäre der, dass man angefangen bei der Definition einer nicht-kommutativen Raumzeit und deren deformierten Symmetriegruppe, die einer Quantengruppe entspricht, die grundlegenden Arbeiten, die die Väter der kommutativen Quantenfeldtheorien für die Minkowski-Raumzeit und der Poincaré-Gruppe als Symmetriegruppe durchgeführt haben, für die neu zu definierende nicht-kommutative Theorie wiederholt. Das heißt, dass man beginnend mit der Entwicklung eines kanonischen Formalismus für eine klassische nicht-kommutative Feldtheorie diese quantisiert und dann renormiert und anschließend die Invarianz dieser Theorie unter Eichtransformationen fordert, um damit Wechselwirkungen einzuführen.

Da dies eine ziemlich langwierige Arbeit ist, ist diesen Weg noch niemand zu Ende gegangen. Die wichtigsten Realisierungen nicht-kommutativer Theorien basieren auf der Vorstellung, dass man das Punkt-Produkt der Felder auf nicht-kommutativer Raumzeit konsistent durch ein neu zu definierendes Produkt zweier kommutativer Felder beschreiben kann. Somit braucht man nur noch alle Punkt-Produkte der Felder einer Feldtheorie durch die neuen Produkte zu ersetzen, um eine nicht-kommutative Feldtheorie zu erhalten.

Als Beispiel für eine mögliche Realisierung, wie man nicht-kommutative Raumzeit auf kommutative Quantenfelder übertragen kann, wurde 1996 von T. Filk [4] aufgezeigt. Er nahm für die Algebra der selbst-adjungierten Operatoren eines Hilbertraums $\mathcal{H}$, deren Eigenwerte die Raumzeitkoordinaten x^μ sein sollen, folgende Algebra an

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i \hat{\Theta}^{\mu\nu} \quad (1.1a)$$

$$[\hat{\Theta}^{\mu\nu}, \hat{x}^\rho] = 0, \quad (1.1b)$$

wobei $\hat{\Theta}^{\mu\nu}$ total antisymmetrisch in den Indizes ist. Da $\hat{\Theta}^{\mu\nu} \in \mathcal{A} = L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ im Zentrum der von $\hat{x}^\mu$ erzeugten Algebra $\mathcal{A}$ liegt, kann $\hat{\Theta}^{\mu\nu}$ für eine gegebene irreduzible Darstellung durch einen reellen Lorentztensor ausgedrückt werden

$$\hat{\Theta}^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1}, \quad \mathbb{1} \in \mathcal{A} \quad (1.2)$$

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{1}{\Lambda_{\text{NC}}^2} c^{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

wobei Λ_{NC} die nicht-kommutative Skala ist. Dieser reelle Tensor ist nichts anderes als der schon oben genannte nicht-kommutative Parameter. Die Algebra (1.1), die auch als „kanonische Algebra“ bekannt ist, ist nur eine mögliche Algebra für die Raumzeit-Operatoren. Weitere Algebren sind die „Lie-Algebra“

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i C_\rho^{\mu\nu} x^\rho, \quad (1.4)$$

und die „Quantengruppen-Algebra“

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i D_{\rho\sigma}^{\mu\nu} x^\rho x^\sigma. \quad (1.5)$$

Eine weitere mögliche Realisierung, wie man Eichfelder auf nicht-kommutativer Raumzeit durch Eichfelder auf kommutativer Raumzeit ausdrücken kann, zeigten E. Witten und N. Seiberg, wiederum in [3]. Sie entwickelten eine Ersetzungsvorschrift, die sogenannte „Seiberg-Witten-Map“ (SWM), mit deren Hilfe man alle nicht-kommutativen Felder durch kommutative Felder ersetzt. Diese Ersetzungsvorschrift erhält man aus der Forderung, dass eine Eichtransformation der kommutativen Felder die Eichtransformation der nicht-kommutativen Felder induziert. Der Vorteil dieses Ansatzes ist, dass die Theorie inhärent eichinvariant ist. Der Nachteil dieses Ansatzes ist, dass die SWMs, bis jetzt zumindest, nur in erster Ordnung in $\theta^{\mu\nu}$ existieren. Es gibt aber Hoffnung [5], dass zumindest abelsche Eichtheorien bis in alle Ordnungen

in $\theta^{\mu\nu}$ geschlossen darstellbar sind. Ein nicht-kommutatives Standardmodell unter Verwendung der SWMs wurde 2002 von Wess et al. [6] formuliert.

An dieser Stelle soll noch die Frage diskutiert werden, wie sich der nicht-kommutative Parameter $\hat{\Theta}^{\mu\nu}$ im allgemeinen Fall bezüglich der Lorentztransformation verhält. Grundsätzlich gibt es drei Möglichkeiten, wie sich $\hat{\Theta}^{\mu\nu}$ transformieren kann:

- $\theta^{\mu\nu}$ ist unter Lorentztransformation ein invarianter Tensor

$$\Lambda_{\mu'}^{\mu} \Lambda_{\nu'}^{\nu} U \hat{\Theta}^{\mu'\nu'} U^{-1} = \hat{\Theta}^{\mu\nu}. \quad (1.6)$$

Dies bedeutet aber, dass die Elemente des Tensors operatorwertige Größen sind, womit sich diese Möglichkeit nicht mit (1.1) vereinbaren lässt.

- $\theta^{\mu\nu}$ ist eine konstante Matrix. Dies würde bedeuten, dass es zwei ausgezeichnete Richtungen gibt, wobei die Richtung $\vec{\theta}_E$ einen zeitartigen und die Richtung $\vec{\theta}_B$ einen raumartigen Charakter aufweisen (Die Indizes E und B stehen für die elektrischen bzw. magnetischen Komponenten von $\theta_{\mu\nu}$). Die zwei ausgezeichneten Richtungen würden sich aber bei einem Bezugssystemwechsel mit ändern, also in jedem beliebigen System konstant bleiben, was physikalisch schwer vorstellbar ist.
- Als letzte Möglichkeit kann $\theta^{\mu\nu}$ ein Lorentztensor sein, der ebenfalls zwei bestimmte Richtungen in der Raumzeit auszeichnet. Diese ausgezeichneten Richtungen ändern sich relativ zu dem jeweiligen Bezugssystem nicht, was bedeutet, dass sich die ausgezeichneten Richtungen mit dem Bezugssystem transformieren. Dies führt dann dazu, dass dieser Tensor implizit die Lorentzinvarianz der Wirkung bzw. der S -Matrix bricht.

Da in der vorliegenden Arbeit (1.1) gelten soll, ist $\theta^{\mu\nu}$ ein Lorentztensor, der zwei Richtungen, $\vec{\theta}_E$ und $\vec{\theta}_B$, auszeichnet. Praktisch heißt das, dass man die Berechnungen so durchführen kann, als ob die Theorie lorentzinvariant wäre. Erst wenn man die konkrete Messung von Observablen diskutieren will, muss man berücksichtigen, dass die Messungen von der Lage des Beschleunigers bezüglich der von $\theta^{\mu\nu}$ ausgezeichneten Richtungen abhängen. Diese ändern sich natürlich im Allgemeinen, da sich die Erde um die eigene Achse und um die Sonne dreht. Die Resultate der Messungen sind also abhängig von dem Zeitpunkt, an dem die Messungen vorgenommen wurden. Das heißt aber, dass bei länger andauernden Messungen über die entsprechenden Bereiche integriert werden muss. Eine tiefergehende Diskussion dieses Themenbereichs, der in jeder Realisierung einer nicht-kommutativen Theorie geführt werden muss, ist nicht Thema dieser Arbeit und bleibt den jeweiligen phänomenologischen Untersuchungen vorbehalten.

Hier sollen nun die Annahmen, die für meine Arbeit bis jetzt schon getroffen werden können, zusammengefasst werden, wobei die Liste noch nicht vollständig ist.

1. Die Raumzeitoperatoren erfüllen die „kanonische Algebra“, das heißt es gilt (1.1).
2. Der nicht-kommutative Parameter $\theta^{\mu\nu}$ ist konstant in Raum und Zeit.
3. Aus den ersten Annahmen folgt schon, dass $\theta^{\mu\nu}$ ein Lorentztensor ist, der zwei bestimmte Richtungen in der Raumzeit auszeichnet und somit implizit die Lorentzinvarianz der Theorie verletzt.
4. Es wird explizit angenommen, dass alle Komponenten von $\theta^{\mu\nu}$, insbesondere θ^{0i} , ungleich Null sein können, dass also Raum-Zeit Nicht-Kommutativität zugelassen wird.

Aus der Forderung des letzten Punktes folgt, dass eben nicht nur die Ortskoordinaten operatorwertige Größen sind, was zu einer Unschärfe oder Nicht-Lokalität im Raum führt, sondern dass auch die Zeitkoordinaten operatorwertig werden, was dementsprechend zu einer Unschärfe oder Nicht-Kausalität in der Zeit führt. Es sei angemerkt, dass sich die Nicht-Lokalität und Nicht-Kausalität nur auf der nicht-kommutativen Skala Λ_{NC} bemerkbar macht und somit die Theorie für Abstände $\gg \Lambda_{\text{NC}}$ sehr wohl lokal und kausal ist. Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, führt dies zu Problemen mit der Unitarität dieser Theorie. Man kann sich nun fragen, weswegen man dann überhaupt eine Raum-Zeit Nicht-Kommutativität zulässt. Die Antwort ist ganz einfach: Warum sollte man, auch wenn dieser allgemeine Fall zu Problemen führt, diese Einschränkung a priori vornehmen? Solange das Experiment eine Raum-Zeit Nicht-Kommutativität nicht ausschließt, sollte man versuchen, die theoretischen Probleme in den Griff zu bekommen, was auch Ziel dieser Arbeit ist.

Diese Arbeit ist wie folgt gegliedert. Zuerst sollen die formalen Grundlagen, die für die weitere Arbeit benötigt werden, entwickelt werden. Anschließend werden dann, ausgehend von der in Kapitel 2 motivierten Lagrangedichte, die Feynmanregeln der hier verwendeten Theorie bestimmt, mit denen wir dann im nächsten Kapitel die differentiellen Wirkungsquerschnitte der Bhabha-, Møller- und Compton-Streuung berechnen. In Kapitel 5 wird das wesentliche Ergebnis dieser Arbeit dargestellt, indem gezeigt wird, dass die Ward-Identität der hier besprochenen Theorie nicht erfüllt werden kann. Im darauf folgenden Kapitel sind dann ein paar Observable von den in Kapitel 4 berechneten Wirkungsquerschnitten dargestellt. Den Abschluss bildet dann die Zusammenfassung in Kapitel 7.

Kapitel 2

Formale Grundlagen

Mit den im vorherigen Kapitel gemachten Annahmen, lässt sich nun explizit ein sogenanntes Stern-Produkt bestimmen, das die Unschärfe der Raumzeit auf das Produkt zweier kommutativer Felder abbildet. Man kann auf mindestens zwei unterschiedlichen Wegen zu dem Stern-Produkt gelangen. Der erste Weg ist, dass man ein Produkt sucht, das die Gleichung

$$x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = [x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

für kommutative Koordinaten x^μ realisiert. Der zweite Weg wird indem nun folgenden Abschnitt 2.1 anhand von [4] erläutert.

2.1 Stern-Produkt

Zuerst sei folgender Operator definiert, der eine Impulstranslation eines Zustands im Impulsraum darstellen soll

$$T(p) := e^{ip_\mu \hat{x}^\mu} \quad T(q) |p\rangle \propto |p+q\rangle \quad (2.2)$$

und folgende Eigenschaften hat

$$T^\dagger(p) = e^{-ip_\mu \hat{x}^\mu} = T(-p) \quad (2.3a)$$

$$\begin{aligned} T(p)T(k) &= e^{ip_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik_\nu \hat{x}^\nu} = e^{i(p+k)_\mu \hat{x}^\mu - \frac{1}{2}p_\mu k_\nu [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu]} \\ &= T(p+k) e^{-\frac{i}{2}p_\mu k_\nu \theta^{\mu\nu}}. \end{aligned} \quad (2.3b)$$

Außerdem soll die Spur im Darstellungsraum die Eigenschaften eines Integrals über die Raumzeit haben, insbesondere soll

$$\text{tr } T(p) = \text{tr } e^{ip_\mu \hat{x}^\mu} := \delta^{(4)}(p) \quad (2.3c)$$

sein. Es sei angemerkt, dass in (2.3b) die geschachtelten Kommutatoren der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel wegen (1.1b) Null sind und in (2.3c) geht ein, dass die Ortsoperatoren $\hat{x}^\mu$ nach [18] ein kontinuierliches Spektrum haben.

Zu dem klassischen Feld $\phi(x)$ kann man nun einen Operator Φ assoziieren, indem man $\phi(x)$ zweimal Fourier-transformiert, wobei für die Rücktransformation operatorwertige ebene Wellen, also die Operatoren $T(p)$ verwendet werden.

$$\Phi = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x d^4p T(p) e^{-ip_\mu x^\mu} \phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p T(p) \tilde{\phi}(p) \quad (2.4)$$

Wie üblich ist $\tilde{\phi}(p)$ die Fouriertransformierte von $\phi(x)$. Das klassische Feld ϕ kann man nun durch das nicht-kommutative Feld Φ ausdrücken

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p e^{ip_\mu x^\mu} \text{tr} [\Phi T^\dagger(p)], \quad (2.5)$$

da die Spur über Φ und T , unter Verwendung von (2.3),

$$\begin{aligned} \text{tr} [\Phi T^\dagger(p)] &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x d^4k e^{-ik_\mu x^\mu} \phi(x) \text{tr} [T(k) T^\dagger(p)] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x d^4k e^{-ik_\mu x^\mu} \phi(x) \delta^{(4)}(k-p) e^{\frac{i}{2} p_\mu k_\nu \theta^{\mu\nu}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x e^{-ip_\mu x^\mu} \phi(x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

ist, wobei schon verwendet wurde, dass die Spur über zwei Operatoren T

$$\text{tr} [T(k) T^\dagger(p)] = \text{tr} [T(k-p) e^{\frac{i}{2} p_\mu k_\nu \theta^{\mu\nu}}] = \delta^{(4)}(k-p) e^{\frac{i}{2} p_\mu k_\nu \theta^{\mu\nu}} \quad (2.7)$$

ergibt. Somit steht in (2.5) nichts anderes als die Identität

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p e^{ip_\mu x^\mu} \text{tr} [\Phi T^\dagger(p)] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p e^{ip_\mu x^\mu} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x e^{-ip_\mu x^\mu} \phi(x) = \phi(x). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Die obige Gleichung erlaubt nun, das Stern-Produkt zwischen zwei kommutativen Feldern zu definieren, indem man in die Spur von (2.5) nun einfach das Punkt-Produkt zweier nicht-kommutativer Felder schreibt

$$(\phi_1 \star \phi_2)(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p e^{ip_\mu x^\mu} \text{tr} [\Phi_1 \Phi_2 T^\dagger(p)]. \quad (2.9)$$

Jetzt bleibt noch die Aufgabe, die rechte Seite der obige Gleichung in kommutative Felder umzuschreiben. Die Spur über die nicht-kommutativen Felder ist mit (2.4)

$$\text{tr} [\Phi_1 \Phi_2 T^\dagger(k)] = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p_1 d^4p_2 \tilde{\phi}(p_1) \tilde{\phi}(p_2) \text{tr} [T(p_1) T(p_2) T^\dagger(k)], \quad (2.10)$$

wobei die obige Spur im Wesentlichen die Spur über die Operatoren T ist. Mit (2.3c) erhält man für die Spur über drei Operatoren T

$$\text{tr} [T(p_1) T(p_2) T^\dagger(k)] = \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k) e^{-\frac{i}{2} [-p_1 \theta k - p_2 \theta k + p_1 \theta p_2]}. \quad (2.11)$$

Da (2.11) eine Delta-Distribution enthält, kann man eine Integration, zum Beispiel die über p_2 , sofort ausführen. Man erhält dann für die Spur über die beiden Operatorfelder Φ und den Operator T

$$\begin{aligned} \text{tr} [\Phi_1 \Phi_2 T^\dagger(k)] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 p_1 \tilde{\phi}(p_1) \tilde{\phi}(k - p_1) e^{-\frac{i}{2}[-p_1 \theta k - (k - p_1) \theta k + p_1 \theta (k - p_1)]} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 p_1 \tilde{\phi}(p_1) \tilde{\phi}(k - p_1) e^{-\frac{i}{2} p_1 \theta k}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

wobei die rechte Seite der obigen Gleichung aus der Antisymmetrie von $\theta_{\mu\nu}$ folgt. Somit erhält man eine mögliche Darstellung des Stern-Produktes

$$\begin{aligned} (\phi_1 \star \phi_2)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k d^4 p_1 e^{i k x} \tilde{\phi}(p_1) \tilde{\phi}(k - p_1) e^{-\frac{i}{2} p_1 \theta k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p_1 d^4 p_2 e^{i(p_1 + p_2)x} \tilde{\phi}(p_1) \tilde{\phi}(p_2) e^{-\frac{i}{2} p_1 \theta (p_1 + p_2)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p_1 d^4 p_2 e^{i(p_1 + p_2)x} \tilde{\phi}(p_1) \tilde{\phi}(p_2) e^{-\frac{i}{2} p_1 \theta p_2} \\ &= e^{\frac{i}{2} \theta_{\mu\nu} \partial_\xi^\mu \partial_\eta^\nu} \phi(x + \xi) \phi(x + \eta) \Big|_{\xi=\eta=0}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

wobei nach dem zweiten Gleichheitszeichen $p_2 = k - p_1$ wurde. Wie man sieht, ist diese Darstellung des Stern-Produktes im Impulsraum definiert. Eine, bis auf mathematische Feinheiten (siehe [7]), äquivalente Darstellung des Stern-Produktes, die im Ortsraum definiert ist, ist

$$(f \star g)(x) = \int d^4 s \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} f(x_\mu + \theta_{\mu\nu} l^\nu / 2) g(x_\mu + s_\mu) e^{i l s} \quad (2.14a)$$

$$= e^{\frac{i}{2} \theta_{\mu\nu} \partial_\xi^\mu \partial_\eta^\nu} f(x + \xi) g(x + \eta) \Big|_{\xi=\eta=0}, \quad (2.14b)$$

wobei (2.14b) durch eine Taylorreihenentwicklung aus (2.14a) hervorgeht.

Wenn man sich nun die Form des Stern-Produktes ansieht, insbesondere (2.14a), sieht man, dass das Stern-Produkt zweier lokaler Felder f und g nicht-lokal und für $\theta_{0i} \neq 0$ auch akausal ist. Dies ist nicht wirklich ein Problem des Modells, da die Lokalität und Kausalität nur oberhalb der nicht-kommutativen Skala Λ_{NC} verletzt ist. Man hat also nur bei sehr kleinen Abständen nicht-lokale und akausale Effekte, was man auch erwarten würde, da bei diesen Abständen die Raumzeit unscharf wird und somit die Frage, was „oben“ und „unten“ bzw. „vorher“ und „nachher“ ist, keinen Sinn mehr macht.

Durch die beliebig hohen Ableitungen des Stern-Produktes steht man auch vor dem Problem, dass bis heute niemand weiß, wie man bei so einer Theorie kanonisch konjugierte Impulse zu den Feldern ϕ einzuführen hat. Damit steht man insbesondere vor dem Problem, dass man nicht weiß, wie die Legendre-Transformation der Hamiltondichte oder der Lagrangedichte auszusehen hat. Wie [7] bemerkt, sind die verschiedenen, in kommutativer Raumzeit äquivalenten, Methoden eine Störungsreihe zu entwickeln, in nicht-kommutativen Theorien nicht mehr gleich. Man kann sich nun fragen, welchen der vier folgenden Ansätze man nun verwenden soll.

- Dyson-Reihe. Sie ergibt sich aus der iterativ gewonnenen Lösung der Schrödingergleichung

$$S(i \rightarrow f) = \langle f | T \left[e^{i \int dt H_I(t)} \right] | i \rangle \quad \text{mit} \quad H_I(t) = \int d^3 \vec{x} \mathcal{H}_I(x)$$

- Gell-Mann-Low Formel

$$S(i \rightarrow f) = \langle f | T \left[e^{i \int d^4 x \mathcal{L}_I(x)} \right] | i \rangle$$

- Yang-Feldman Ansatz. Ihm liegt die iterative Lösung der Feldgleichung zugrunde (siehe [13])
- Pfadintegralansatz

Da dies auf dieser Ebene nicht beantwortet werden kann, muss man sich für einen Ansatz entscheiden. Ich habe mich für den Ansatz der Gell-Mann-Low Formel entschieden, da dieser mit der Lagrangedichte beginnt. Damit entfällt das Problem, eine Legendre-Transformation durchführen zu müssen. Solange es noch keine experimentellen Daten gibt, anhand derer man die verschiedenen Ansätze ausschließen kann, muss man die verschiedenen Herangehensweisen auf ihre Konsistenz hin untersuchen, und versuchen, damit den einen oder anderen Ansatz auszuschließen.

Die obige Liste mit Annahmen, die wir für diese Theorie getroffen habe, kann man jetzt um einen Punkt erweitern:

5. Ausgangspunkt der Störungsreihe soll die Gell-Mann-Low Formel

$$S(i \rightarrow f) = \langle f | T \left[e^{i \int d^4 x \mathcal{L}_I(x)} \right] | i \rangle \quad (2.15)$$

sein.

Im nächsten Abschnitt soll nun die Eichtransformation für die nicht-kommutative Quantenelektrodynamik (NCQED) entwickelt werden.

2.2 Eichtransformation

Wir beginnen mit der Forderung, dass unsere NCQED invariant unter lokalen nicht-kommutativen Eichtransformationen sein soll, wobei „lokal“ bedeutet, dass die Eichphase explizit eine Funktion von x^μ ist. Nicht-kommutative Eichtransformation bedeutet, dass alle Punkt-Produkte zwischen den Feldern, insbesondere das Produkt zwischen Materiefeld, Eichfeld und Phase, durch ein Stern-Produkt ersetzt werden. Man kann nun den im kommutativen Fall üblichen Weg gehen (siehe z.B. [8]), und aus der Eichinvarianzforderung die kovariante Ableitung herleiten, woraus sich wieder die Transformationseigenschaft des Eichfeldes ergibt.

Die infinitesimalen Eichtransformationen der Dirac- und Eichfelder sowie des Feldstärketensors sehen folgendermaßen aus

$$\Psi \rightarrow \Psi + i\alpha \star \Psi \quad (2.16a)$$

$$\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} - i\bar{\Psi} \star \alpha \quad (2.16b)$$

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \frac{1}{e}\partial^\mu \alpha + i[\alpha \star A^\mu] \quad (2.16c)$$

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F^{\mu\nu} + i[\alpha \star F^{\mu\nu}], \quad (2.16d)$$

wobei α die lokale Phase ist. Mit der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (2.17)$$

erhält man den Feldstärketensor

$$D_\mu \star D_\nu - D_\nu \star D_\mu \equiv [D_\mu \star D_\nu] =: ieF_{\mu\nu} = ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i e[A_\mu \star A_\nu]) \quad (2.18)$$

und damit die Lagrangedichte der NCQED

$$\mathcal{L}_{\text{NCQED}} = \bar{\Psi} \star (i \not{D}) \star \Psi - m \bar{\Psi} \star \Psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} \star F_{\mu\nu}. \quad (2.19)$$

Es bleibt nun zu zeigen, dass die Wirkung der Lagrangedichte $\int d^4x \mathcal{L}_{\text{NCQED}}$ eine Invariante unter lokaler $U(1)$ -Eichtransformation ist. Dazu gibt es zwei Vorgehensweisen. Man kann entweder zeigen, dass jeder der drei Terme in der Lagrangedichte eichinvariant ist, oder man zeigt, dass die einzelnen Bausteine der Lagrangedichte invariant unter Eichtransformationen sind, was eleganter und mächtiger ist. Zuerst schauen wir uns den Massenterm in der Lagrangedichte, also $\bar{\Psi} \star \Psi$, an. Dieser Term ist eichinvariant, da

$$\bar{\Psi} \star \Psi \rightarrow \bar{\Psi}(1 - i\star\alpha)(1 + i\star\alpha)\Psi \stackrel{1.\text{Ord.}}{=} \bar{\Psi} \star \Psi + (i\bar{\Psi} \star \alpha \star \Psi - i\bar{\Psi} \star \alpha \star \Psi) = \bar{\Psi} \star \Psi \quad (2.20)$$

ist. Ebenso ist der kinetische Term der freien Eichbosonen eichinvariant, da ebenfalls

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \star F_{\mu\nu} &\rightarrow (F^{\mu\nu} + i[\alpha \star F^{\mu\nu}]) \star (F_{\mu\nu} + i[\alpha \star F_{\mu\nu}]) \\ &\stackrel{1.\text{Ord.}}{=} F^{\mu\nu} \star F_{\mu\nu} + i[F^{\mu\nu} \star \alpha \star F_{\mu\nu} - F^{\mu\nu} \star F_{\mu\nu} \star \alpha \\ &\quad + \alpha \star F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu} - F_{\mu\nu} \star \alpha \star F^{\mu\nu}] = F^{\mu\nu} \star F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.21)$$

ist, wobei die obige Gleichung nur unter der Operator-Spur (2.3c) bzw. dem Raumzeitintegral gilt, da nur dort das Kommutativgesetz gilt, also $\text{tr}(\alpha \star F^{\mu\nu}) = \text{tr}(F^{\mu\nu} \star \alpha)$ ist. Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass sich $(i \not{D}) \star \Psi$ wie Ψ transformiert. Wenn dies der Fall ist, haben wir mit (2.20) gezeigt, dass auch der erste Term in der Lagrangedichte eichinvariant ist. Da

$$\begin{aligned} (i \not{D}) \star \Psi &\rightarrow i[\not{D} + ie(\not{A} - \frac{1}{e}\not{\partial}\alpha + i[\alpha \star \not{A}])] \star (\Psi + i\alpha \star \Psi) \\ &\stackrel{1.\text{Ord.}}{=} i[\not{D}\Psi + i\not{D}(\alpha \star \Psi) + ie\not{A} \star \Psi - e\not{A} \star \alpha \star \Psi - i(\not{D}\alpha) \star \Psi - e[\alpha \star \not{A}] \star \Psi] \end{aligned}$$

$$= (i \not{D} \star \Psi) + i \alpha \star (i \not{D} \star \Psi) \quad (2.22)$$

ist, haben wir gezeigt, dass die Lagrangedichte der NCQED invariant unter den nicht-kommutativen Eichtransformationen (2.16) ist.

Da die Invarianz der Lagrangedichte unter Eichtransformationen nicht automatisch impliziert, dass auch die Amplitude eichinvariant ist, dass also die Ward-Identität erfüllt ist - ähnlich der chiralen Anomalien -, werden wir im nächsten Abschnitt die Ward-Identität näher betrachten.

2.3 Ward-Identität

Vorweg sei angemerkt, dass in diesem Abschnitt nur die Ergebnisse des BRST Formalismus angeführt werden sollen, da eine detaillierte Behandlung dieses Themas außerhalb des Themengebiets dieser Diplomarbeit liegt (weiteres ist in [9] zu finden).

Wegen den Termen in der Lagrangedichte, die von der Form $\partial_\mu A_\nu \star A^\mu \star A^\nu$ sind, werden analog zur QCD, die entsprechend Terme der Form $f_{abc}(\partial_\mu A_{a\nu})A_b^\mu A_c^\nu$ aufweist, unphysikalische Photon-Zustände erzeugt. Damit der Photon-Propagator in der Störungsrechnung invertierbar wird, bedarf es einen Eichfixierungsterm, den wir als $\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$ wählen. Wenn man diesen Term noch so wählt, dass die Lagrangedichte BRST-invariant, also eichinvariant, bleibt, gelangt man zu dem folgenden Eichfixierungsterm

$$\mathcal{L}_{\text{g.f.}} = \delta_{\text{BRST}} \left(\bar{c} \star \left(\frac{\xi}{2} B + \partial_\mu A^\mu \right) \right), \quad (2.23)$$

mit dem Fadeev-Popov Geist c , dem Antigeist $\bar{c}$ und dem Nakanishi-Lautrup Feld B . Dieser Eichfixierungsterm, der wie schon gesagt, die Lagrangedichte BRST-invariant läßt, sorgt inhärent auch dafür, dass der Hilbertraum positiv definit wird und somit die unphysikalischen Photon-Zustände entfernt werden. Die Summe aus der nicht-kommutativen Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{NCQED}}$ und dem Eichfixierungsterm $\mathcal{L}_{\text{g.f.}}$ ist invariant unter der folgenden nicht-kommutativen BRST-Transformation

$$\delta_{\text{BRST}} \psi = i e c \star \psi \quad (2.24a)$$

$$\delta_{\text{BRST}} \bar{\psi} = -i e \bar{\psi} \star c \quad (2.24b)$$

$$\delta_{\text{BRST}} A_\mu = [D_\mu \star c] \quad (2.24c)$$

$$\delta_{\text{BRST}} c = \frac{i}{2} [c \star c] \quad (2.24d)$$

$$\delta_{\text{BRST}} \bar{c} = B \quad (2.24e)$$

$$\delta_{\text{BRST}} B = 0, \quad (2.24f)$$

was nach dem Noether'schen Theorem bedeutet, dass eine erhaltene Ladung Q_{BRST} existiert. Aus der BRST-Transformation (2.24) folgt für den Eichfixierungsterm

$$\mathcal{L}_{\text{g.f.}} = B \star \left(\frac{\xi}{2} B + \partial_\mu A^\mu \right) + \bar{c} \star \partial_\mu [D^\mu \star c], \quad (2.25)$$

womit sich mit der Euler-Lagrange-Gleichung $\partial\mathcal{L}_{\text{g.f.}}/\partial B$ für das Nakanishi-Lautrup Feld

$$B = -\frac{1}{\xi}\partial_\mu A^\mu \quad (2.26)$$

ergibt. Somit erhält man für den Eichfixierungsterm

$$\mathcal{L}_{\text{g.f.}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu \star \partial^\mu A_\mu) + \bar{c} \star (\partial^\mu \partial_\mu) c + i e \bar{c} \star \partial_\mu [A^\mu \star c], \quad (2.27)$$

womit man indirekt (siehe [9]) folgende Ward-Identität erhält

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle 0 | T A^\mu(x) \Phi_1(x_1) \Phi_2(x_2) \cdots \Phi_n(x_n) | 0 \rangle_{\text{amputiert, on-shell}} = 0, \quad (2.28)$$

die unter der Voraussetzung gilt, dass alle physikalischen Felder amputiert und auf der Massenschale (on-shell) sind, wobei die Felder Φ_j entweder Materiefelder oder Eichfelder mit physikalischer Polarisation sind. Wenn nun die Ward-Identität (2.28) *nicht* erfüllt sein sollte, ist die BRST Ladung nicht erhalten, was zur Folge hat, dass es nicht möglich ist, einen Hilbertraum mit positiver Norm zu erzeugen. Das heißt, dass eine Theorie, die die Ward-Identität verletzt, physikalisch keinen Sinn macht und somit unbrauchbar ist.

2.4 Unitarität

Für eine Theorie, die physikalisch Sinn machen soll, ist es nicht nur essentiell, dass die Ward-Identität erfüllt ist, sie muss auch, wenn man sie quantenmechanisch interpretieren will, unitär sein.

Wenn man nun die fünf oben getroffenen Annahmen umsetzt und mit der so gewonnenen nicht-kommutativen Theorie Amplituden berechnet (Feynmanregeln findet man zum Beispiel in [10]), so findet man [11], dass das optische Theorem, bzw. die Schnittregeln [12] verletzt sind. Das heißt, dass diese Theorie nicht mehr unitär ist. Wenn man aber eine rein Raum-Raum Nicht-Kommutativität annimmt, also $\theta_{0i} \equiv 0$ setzt, dann erfüllt diese Theorie das optische Theorem. Man kann sich nach dieser Entdeckung auf den Standpunkt von [11] stellen und sagen, dass NCQFTen nur für $\theta_{0i} \equiv 0$ einen Limes der String-Theorie darstellen und entsprechend nur diese Art von nicht-kommutativen QFTen physikalisch sinnvoll sind.

Im Jahr 2002 erschien jedoch eine Veröffentlichung von K. Fredenhagen et. al. [13], indem gezeigt wird, dass die Unitaritätsverletzung auf ein naives Vertauschen des Zeitordnungsoperators mit den unendlich hohen Ableitungen des Stern-Produktes zurückzuführen ist. Im selben Jahr entwickelten Y. Liao und K. Sibold [14] eine nicht-kommutative ϕ^3 -Theorie in sogenannter zeitgeordneter Störungstheorie (Time Ordered Perturbation Theory, TOPT), indem sie das Ergebnis von [13] umsetzten. In der vorliegenden Arbeit verwenden wir für den Ansatz von Y. Liao und K. Sibold den Begriff Wechselwirkungspunkt-Zeitordnung (Interaction-Point Time-Ordering, IPTO), der in [7] eingeführt wurde. Diese Bezeichnung verdeutlicht besser, was für

eine Art von Zeitordnung tatsächlich verwendet wird. Y. Liao und K. Sibold konnten nun zeigen [15], dass diese IPTO NCQFT das optische Theorem auch für $\theta_{0i} \neq 0$ erfüllt und somit unitär bleibt. Jetzt erschien es möglich, eine allgemeine, das heißt in Raum und Zeit, nicht-kommutative Eichtheorie zu entwickeln. Der erste Schritt wurde von Y. Liao und C. Dehne in [16] gemacht, indem sie den Streuprozess $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ berechneten. In dieser Diplomarbeit setzen wir nun diese Arbeit fort, und berechnen unter anderem zum ersten Mal die Compton-Streuung. Das Besondere bei der Compton-Streuung ist, dass externe Eichbosonen in dem Streuprozess involviert sind, weswegen man in der Lage ist, die Ward-Identität (2.28) anhand dieses Prozesses zu überprüfen.

Das Ergebnis dieser Berechnung, was sich auch als das wesentliche Ergebnis meiner Diplomarbeit darstellt, ist, dass die IPTO NCQED in kovarianter Eichung (2.23) für die Compton-Streuung *negative* Wirkungsquerschnitte liefert, was weiter unten auch in Abbildung 4.4 gezeigt ist. Es stellt sich heraus, dass diese Theorie die Ward-Identität nicht erfüllt, dass es also nicht möglich ist, einen Hilbertraum mit positiv definiten Norm zu erzeugen. T. Ohl, R. Rückl und ich konnten nun zeigen [9], dass es grundsätzlich nicht möglich ist, eine $U(N)$ Eichtheorie in IPTO NCQED zu bekommen, die eichinvariant ist. Da dies aber, wie oben schon gesagt, essentiell ist, wenn diese Theorie physikalisch Sinn machen soll, kann man mit dem Ergebnis dieser Arbeit sagen, dass die IPTO NCQED physikalisch unbrauchbar ist.

Es ist nun zukünftigen Arbeiten vorbehalten, das Verhalten von anderen nicht-kommutativen Theorien, zum Beispiel Theorien mit Seiberg-Witten-Maps in allen Ordnungen in $\theta_{\mu\nu}$, bezüglich der Unitarität und der Erhaltung der Ward-Identität zu untersuchen.

Zum Schluss seien noch kurz zwei weitere Probleme erwähnt, die aber nicht direkt diese Arbeit berühren.

Wie M. Hayakawa in [17] zeigte, kann bei einer $U(1)$ -Eichtheorie die elektrische Ladung nur die Werte $\{1, 0, -1\}$ annehmen. Dies führt dann zu einem Problem, wenn man gleichartige Quarks, die drittelzahlige Ladungen haben, mit dieser Theorie beschreiben will. Da es, wie wir später sehen werden, in dieser Theorie einen drei-Photon-Vertex gibt, ist durch die Eichinvarianzbedingung der NCQED die Kopplung der Photonen auf $-e$ festgelegt. Wenn man nun den Prozess $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$ betrachtet, würde das virtuelle Photon, das drittelzahlig an das Quark q koppelt, ganzzahlig an die Photonen γ koppeln, was, wie schon gesagt, wegen der Eichinvarianz nicht erlaubt ist. Dieses Problem umgeht Wess et. al. in [6], indem er geschickt die Freiheiten in den SWMs ausnutzt. In dieser Arbeit spielt das Problem keine Rolle, da wir es hier nur mit einem geladenen Fermion zu tun haben.

Ein weiteres Problem, das im Zusammenhang mit NCQFTen auftritt ist, dass bei diesen Theorien eine Mischung zwischen UV- und IR-Divergenzen auftritt (siehe zum Beispiel für eine Einführung [10]). Da in dieser Arbeit nur in niedrigster Ordnung Störungsrechnung gerechnet wird, ist auch dieses Problem für diese Arbeit nicht relevant.

An dieser Stelle ist die letzte und alle vorher schon genannten Annahmen der IPTO NCQED, die dieser Arbeit zugrunde liegen, aufgelistet:

1. Die Raumzeitoperatoren erfüllen die „kanonische Algebra“, das heißt es gilt (1.1).
2. Der nicht-kommutative Parameter $\theta^{\mu\nu}$ ist konstant in Raum und Zeit.
3. Aus den ersten Annahmen folgt schon, dass $\theta^{\mu\nu}$ ein Lorentztensor ist, der eine bestimmte Richtung in der Raumzeit auszeichnet und somit implizit die Lorentzinvarianz der Theorie verletzt.
4. Es wird explizit angenommen, dass alle Komponenten von $\theta^{\mu\nu}$, insbesondere θ^{0i} , ungleich Null sind, dass also Raum-Zeit Nicht-Kommutativität zugelassen wird.
5. Ausgangspunkt der Störungsreihe soll die Gell-Mann-Low Formel

$$S(i \rightarrow f) = \langle f | T \left[e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I} \right] | i \rangle$$

sein.

6. Die Ableitungen, die von dem Stern-Produkt herrühren, werden nicht mit dem Zeitordnungsoperator vertauscht.

Mit dieser Einführung sind wir jetzt in der Lage, Streuamplituden und somit auch Observable auszurechnen, was der Inhalt der nächsten Kapitel auch sein wird.

Kapitel 3

Feynmanregeln

In diesem Kapitel soll nun der erste Schritt hin zur Bestimmung von Observablen in der IPTO NCQED gemacht werden. Dieser erste Schritt hin zum differentiellen Wirkungsquerschnitt eines Streuprozesses, auf dem die meisten Observablen der Elementarteilchenphysik beruhen, soll die Berechnung der Streuamplituden von Bhabha- und Compton-Streuung sein. Anhand der berechneten Amplitude kann man dann einen Teil der Feynmanregeln der IPTO NCQED bestimmen. Dieses Vorgehen ist äquivalent zu dem Beweis des Wick-Theorems (siehe zum Beispiel [8]), weshalb dies hier nicht explizit bewiesen werden soll.

Das Kapitel ist wie folgt gegliedert: Zuerst soll ein kurzer vorbereitender Abschnitt kommen, dem sich in Abschnitt 3.2 die ausführliche Berechnung der Streuamplitude der Bhabha-Streuung anschließt. Die Berechnung wird besonders ausführlich vorgeführt, damit der Leser die Berechnung in IPTO NCQED am Beispiel von s - und u -Kanal Schritt für Schritt nachvollziehen kann. Im darauffolgenden Abschnitt widmen wir uns der Amplitude der Compton-Streuung, bei der der, in der kommutativen QED nicht vorhandene, drei-Photon-Vertex relevant wird. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird dann noch der vier-Photon-Vertex und der Geist-Propagator bestimmt, womit wir dann alle Feynmanregeln der IPTO NCQED beisammen haben.

3.1 Vorbereitung

Beginnen wollen wir mit einem kurzen einleitenden Abschnitt. Wie wir aus dem letzten Kapitel wissen (siehe die sechs Annahmen am Ende des Kapitels), soll der Ausgangspunkt zur Bestimmung der Feynmanregeln die Gell-Mann-Low-Formel sein, die hier noch einmal aufgeführt ist

$$S(i \rightarrow f) = \langle f | T \left[e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I} \right] | i \rangle . \quad (3.1)$$

Die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ ist die Summe aus der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{NCQED}}$ (2.19) und dem Eichfixierungsterm $\mathcal{L}_{\text{g.f.}}$ (2.27). Damit erhalten wir für die Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi} \star (\mathrm{i} \not{\partial} - m) \cdot \Psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} \star F_{\mu\nu} - e \bar{\Psi} \star (\gamma^\mu A_\mu) \star \Psi \\ & - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu \star \partial^\mu A_\mu) + \bar{c} \star (\partial^\mu \partial_\mu) \cdot c + \mathrm{i} e \bar{c} \star \partial_\mu [A^\mu \star c] , \end{aligned} \quad (3.2)$$

wobei die Definition des Stern-Produkts in (2.14) zu finden ist. Der Feldstärke-Tensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \mathrm{i} e [A_\mu \star A_\nu] \quad (3.3)$$

erhält, wie in Abschnitt 2.2 schon gezeigt, ähnlich wie bei einer nicht-abelschen Eichtheorie, einen nichtlinearen Term, weshalb es, analog zur QCD, einen drei- und vier-Photon-Vertex gibt. Wie in der QCD auch, generieren die Terme der Form $\partial_\mu A_\nu \star A^\mu \star A^\nu$ in der NCQED Photonen mit unphysikalischen Polarisationszuständen. Konsequenterweise entkoppeln auch die Geist-Felder nicht mehr vollständig von den Eichfeldern, wie es in der kommutativen QED der Fall ist (siehe Abschnitt 2.3).

Da nun das Stern-Produkt die Eigenschaft hat, dass eine Bilinearform des Stern-Produkts innerhalb eines Integrals über die gesamte Raumzeit gleich dem Integral über das übliche kommutative Punkt-Produkt ist

$$\int \mathrm{d}^4 x f(x) \star g(x) = \int \mathrm{d}^4 x f(x) \cdot g(x) , \quad (3.4)$$

ergeben sich keine Änderungen an der freien Theorie. Somit wirkt sich das Stern-Produkt nur auf die Teile der Lagrangedichte (3.2) aus, die drei oder mehr Felder enthalten. Diese Terme bilden zusammen die Wechselwirkungs-Lagrangedichte, womit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = & -\frac{1}{4} (e [A_\mu \star A_\nu] \star (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + e (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \star [A^\mu \star A^\nu] \\ & + e^2 [A^\mu \star A^\nu] \star [A_\mu \star A_\nu]) - e \bar{\Psi} \star (\gamma^\mu A_\mu) \star \Psi + \mathrm{i} e \bar{c} \star \partial_\mu [A^\mu \star c] \end{aligned} \quad (3.5)$$

ist, was sich noch durch einfaches Umbenennen der Indizes zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = & -e (\partial_\mu A_\nu) \star [A^\mu \star A^\nu] - \frac{1}{4} e^2 [A^\mu \star A^\nu] \star [A_\mu \star A_\nu] \\ & - e \bar{\Psi} \star (\gamma^\mu A_\mu) \star \Psi + \mathrm{i} e \bar{c} \star \partial_\mu [A^\mu \star c] \end{aligned} \quad (3.6)$$

zusammenfassen lässt.

Nun haben wir die benötigte Wechselwirkungs-Lagrangedichte, um mit der Berechnung von Amplituden anfangen zu können, was wir auch in den nächsten Abschnitten, beginnend mit der Bhabha-Streuung, tun werden.

3.2 Bhabha-Streuung

In diesem Abschnitt wollen wir anhand der Bhabha-Streuung den Photon-Propagator und den Fermion-Photon-Vertex bestimmen. Ausgehend von der

Gell-Mann-Low-Formel (3.1) erhält man in niedrigster Ordnung Störungstheorie folgendes S -Matrixelement

$$S_{\text{Bh}}^{(2)} = -\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle e^-(k_1) e^+(k_2) | T [\mathcal{L}_I(x_1) \cdot \mathcal{L}_I(x_2)] | e^-(p_1) e^+(p_2) \rangle \quad (3.7)$$

Wenn wir nun explizit die Wechselwirkungs-Lagrangedichte (3.6) einsetzen, erhält man für das S -Matrixelement

$$\begin{aligned} S_{\text{Bh}}^{(2)} = & -\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle e^-(k_1) e^+(k_2) | T \left[\left(-e(\partial_\mu A_\nu) \star [A^\mu \star A^\nu] \right. \right. \\ & - \frac{1}{4} e^2 [A^\mu \star A^\nu] \star [A_\mu \star A_\nu] - e \bar{\Psi} \star (\gamma^\mu A_\mu) \star \Psi + i e \bar{c} \star \partial_\mu [A^\mu \star c] \Big) (x_1) \\ & \cdot \left(-e(\partial_\rho A_\sigma) \star [A^\rho \star A^\sigma] - \frac{1}{4} e^2 [A^\rho \star A^\sigma] \star [A_\rho \star A_\sigma] \right. \\ & \left. \left. - e \bar{\Psi} \star (\gamma^\rho A_\rho) \star \Psi + i e \bar{c} \star \partial_\rho [A^\rho \star c] \right) (x_2) \right] | e^-(p_1) e^+(p_2) \rangle \quad (3.8) \end{aligned}$$

Da wir in diesem Abschnitt die Bhabha-Streuung ausrechnen wollen, tragen alle Terme mit mehr als zwei Photonfeldern nicht zur Streuamplitude bei, weswegen sie hier weggelassen werden können. Es trägt somit nur folgender Term

$$\begin{aligned} & (-e \bar{\Psi} \star (\gamma^\mu A_\mu) \star \Psi)(x_1) \cdot (-e \bar{\Psi} \star (\gamma^\nu A_\nu) \star \Psi)(x_2) \\ & = \left(-e \cdot e^{\frac{i}{2} \theta_{\mu\nu}} (\partial_{\xi_1}^\mu \partial_{\eta_1}^\nu + \partial_{\xi_2}^\mu \partial_{\eta_2}^\nu) \right. \\ & \quad \bar{\Psi}(x_1 + \xi_1 + \alpha_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1 + \xi_1 + \beta_1) \Psi(x_1 + \eta_1) |_{\xi_1=\eta_1=\alpha_1=\beta_1=0} \Big) \\ & \cdot \left(-e \cdot e^{\frac{i}{2} \theta_{\mu\nu}} (\partial_{\alpha_1}^\mu \partial_{\beta_1}^\nu + \partial_{\alpha_2}^\mu \partial_{\beta_2}^\nu) \right. \\ & \quad \bar{\Psi}(x_2 + \xi_2 + \alpha_2) \gamma^\nu A_\nu(x_2 + \xi_2 + \beta_2) \Psi(x_2 + \eta_2) |_{\xi_2=\eta_2=\alpha_2=\beta_2=0} \Big) \quad (3.9) \end{aligned}$$

zur Streuamplitude bei, indem gleich die explizite Darstellung des Stern-Produktes eingesetzt wurde.

Nun fangen wir an, Schritt für Schritt die Amplitude

$$\begin{aligned} S_{\text{Bh}}^{(2)} = & -\frac{1}{2} e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle e^-(k_1) e^+(k_2) | \\ & T \left[e^{\frac{i}{2} \theta_{\mu\nu}} (\partial_{\xi_1}^\mu \partial_{\eta_1}^\nu + \partial_{\xi_2}^\mu \partial_{\eta_2}^\nu + \partial_{\alpha_1}^\mu \partial_{\beta_1}^\nu + \partial_{\alpha_2}^\mu \partial_{\beta_2}^\nu) \right. \\ & \bar{\Psi}(x_1 + \xi_1 + \alpha_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1 + \xi_1 + \beta_1) \Psi(x_1 + \eta_1) \\ & \left. \bar{\Psi}(x_2 + \xi_2 + \alpha_2) \gamma^\nu A_\nu(x_2 + \xi_2 + \beta_2) \Psi(x_2 + \eta_2) \right] \\ & | e^-(p_1) e^+(p_2) \rangle_{\xi_l=\eta_l=\alpha_l=\beta_l=0; l=1,2} \quad (3.10) \end{aligned}$$

auszurechnen, wobei wir ab dieser Stelle nicht mehr explizit angeben, dass die Größen ξ , η , α und β nach dem Ausführen der Ableitungen gleich Null gesetzt werden.

Im ersten Schritt wollen wir die zwei internen Photonfelder $A_\mu(x_1)$ und $A_\nu(x_2)$ kontrahieren und den Zeitordnungsoperator explizit durch Heaviside-Funktionen ausdrücken. Die Kontraktion der beiden Eichfelder ergibt die retardierte Green'sche Funktion

$$\overline{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)} = \langle 0 | T [A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)] | 0 \rangle \equiv \tau(x_1^0 - x_2^0) D_{\mu\nu}(x_1 - x_2), \quad (3.11)$$

mit

$$D_{\mu\nu}(x_1 - x_2) := \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{g_{\mu\nu}}{2E_{\vec{q}}} e^{-i q(x_1 - x_2)} \Big|_{q^0 = E_{\vec{q}}}. \quad (3.12)$$

Dabei darf man nicht den Fehler machen, die Wightman-Funktion (3.12) mit dem kausalen Photon-Propagator zu verwechseln, der in der kommutativen QED wie folgt aussieht

$$\begin{aligned} D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) &:= \tau(x_1^0 - x_2^0) D_{\mu\nu}(x_1 - x_2) + \tau(x_2^0 - x_1^0) D_{\mu\nu}(x_2 - x_1) \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-i q(x_1 - x_2)} \Big|_{q^0 = E_{\vec{q}}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Es sei angemerkt, dass in dieser Arbeit der griechische Buchstaben τ das Symbol für die Heaviside-Funktion ist, da der Buchstabe θ schon für den nicht-kommutativen Parameter vergeben ist. Es stellt sich die Frage, warum sich die retardierte und avancierte Green'sche Funktion (3.11) nicht mit den Heaviside-Funktionen zu dem üblichen Feynman-Propagator (3.13) zusammenfassen lassen. Wie in der Amplitude

$$\begin{aligned} S_{\text{Bh}}^{(2)} &= -\frac{1}{2} e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle e^-(k_1) e^+(k_2) | \\ &\quad \tau(x_1^0 - x_2^0) \left[e^{\frac{i}{2} \theta_{\mu\nu} (\partial_{\xi_1}^\mu \partial_{\eta_1}^\nu + \partial_{\xi_2}^\mu \partial_{\eta_2}^\nu + \partial_{\alpha_1}^\mu \partial_{\beta_1}^\nu + \partial_{\alpha_2}^\mu \partial_{\beta_2}^\nu)} \right. \\ &\quad \bar{\Psi}(x_1 + \xi_1 + \alpha_1) \gamma^\mu \Psi(x_1 + \eta_1) D_{\mu\nu}(x_1 + \xi_1 + \beta_1 - x_2 - \xi_2 - \beta_2) \\ &\quad \left. \bar{\Psi}(x_2 + \xi_2 + \alpha_2) \gamma^\nu \Psi(x_2 + \eta_2) \right] \\ &\quad + \tau(x_2^0 - x_1^0) \left[e^{\frac{i}{2} \theta_{\mu\nu} (\partial_{\xi_1}^\mu \partial_{\eta_1}^\nu + \partial_{\xi_2}^\mu \partial_{\eta_2}^\nu + \partial_{\alpha_1}^\mu \partial_{\beta_1}^\nu + \partial_{\alpha_2}^\mu \partial_{\beta_2}^\nu)} \right. \\ &\quad \bar{\Psi}(x_1 + \xi_1 + \alpha_1) \gamma^\mu \Psi(x_1 + \eta_1) D_{\mu\nu}(x_2 + \xi_2 + \beta_2 - x_1 - \xi_1 - \beta_1) \\ &\quad \left. \bar{\Psi}(x_2 + \xi_2 + \alpha_2) \gamma^\nu \Psi(x_2 + \eta_2) \right] | e^-(p_1) e^+(p_2) \rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

zu sehen ist, haben die Green'schen Funktionen unterschiedliche Phasenfaktoren, die von den Stern-Produkten herrühren. Diese unterschiedlichen Phasenfaktoren sind nun dafür verantwortlich, dass sich die Green'schen Funktionen zwar zu einem Propagator zusammenfassen lassen, der den gleichen Pol wie der Feynman-Propagator hat, dessen Residuum sich aber durch die nicht-kommutativen Phasen der IPTO NCQED von dem, aus der QED bekannten Propagator unterscheidet. Um unnötige sprachliche Unklarheiten zu vermeiden, soll dieser Propagator weiterhin Feynman-Propagator heißen. Mehr zu diesem Thema kommt dann im nächsten Kapitel.

Im nächsten Schritt werden wir die Fermionfelder mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der externen Teilchen kontrahieren und die gesamte Amplitude im Impulsraum schreiben. Dazu benötigt man zusätzlich zu (3.12) noch die Integraldarstellung der Heaviside-Funktion, die nach [19] folgende Form hat

$$\tau(x_1^0 - x_2^0) = i \int \frac{dt}{2\pi} \frac{e^{-it(x_1^0 - x_2^0)}}{t + i\epsilon}. \quad (3.15)$$

Damit bekommt man das S -Matrizelement im Impulsraum

$$\begin{aligned} S_{\text{Bh}}^{(2)} = & -\frac{1}{2}e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \int \frac{dt}{2\pi} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \\ & \left[i \frac{e^{-it(x_1^0 - x_2^0)}}{t + i\epsilon} e^{\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}(\partial_{\xi_1}^\mu \partial_{\eta_1}^\nu + \partial_{\xi_2}^\mu \partial_{\eta_2}^\nu + \partial_{\alpha_1}^\mu \partial_{\beta_1}^\nu + \partial_{\alpha_2}^\mu \partial_{\beta_2}^\nu)} \right. \\ & \left(-2\bar{u}(k_1) e^{ik_1(x_1 + \xi_1 + \alpha_1)} \gamma^\mu v(k_2) e^{ik_2(x_1 + \eta_1)} \frac{g_{\mu\nu}}{2E_{\vec{q}}} e^{-iq(x_1 + \xi_1 + \beta_1 - x_2 - \xi_2 - \beta_2)} \right. \\ & \quad \bar{v}(p_2) e^{-ip_2(x_2 + \xi_2 + \alpha_2)} \gamma^\nu u(p_1) e^{-ip_1(x_2 + \eta_2)} \\ & + 2\bar{v}(p_2) e^{-ip_2(x_1 + \xi_1 + \alpha_1)} \gamma^\mu v(k_2) e^{ik_2(x_1 + \eta_1)} \frac{g_{\mu\nu}}{2E_{\vec{q}}} e^{-iq(x_1 + \xi_1 + \beta_1 - x_2 - \xi_2 - \beta_2)} \\ & \quad \left. \bar{u}(k_1) e^{ik_1(x_2 + \xi_2 + \alpha_2)} \gamma^\nu u(p_1) e^{-ip_1(x_2 + \eta_2)} \right) \\ & + i \frac{e^{-it(x_2^0 - x_1^0)}}{t + i\epsilon} e^{\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}(\partial_{\xi_1}^\mu \partial_{\eta_1}^\nu + \partial_{\xi_2}^\mu \partial_{\eta_2}^\nu + \partial_{\alpha_1}^\mu \partial_{\beta_1}^\nu + \partial_{\alpha_2}^\mu \partial_{\beta_2}^\nu)} \\ & \left(-2\bar{u}(k_1) e^{ik_1(x_1 + \xi_1 + \alpha_1)} \gamma^\mu v(k_2) e^{ik_2(x_1 + \eta_1)} \frac{g_{\mu\nu}}{2E_{\vec{q}}} e^{iq(x_1 + \xi_1 + \beta_1 - x_2 - \xi_2 - \beta_2)} \right. \\ & \quad \bar{v}(p_2) e^{-ip_2(x_2 + \xi_2 + \alpha_2)} \gamma^\nu u(p_1) e^{-ip_1(x_2 + \eta_2)} \\ & + 2\bar{v}(p_2) e^{-ip_2(x_1 + \xi_1 + \alpha_1)} \gamma^\mu v(k_2) e^{ik_2(x_1 + \eta_1)} \frac{g_{\mu\nu}}{2E_{\vec{q}}} e^{iq(x_1 + \xi_1 + \beta_1 - x_2 - \xi_2 - \beta_2)} \\ & \quad \left. \bar{u}(k_1) e^{ik_1(x_2 + \xi_2 + \alpha_2)} \gamma^\nu u(p_1) e^{-ip_1(x_2 + \eta_2)} \right) \Big]_{q^0 = E_{\vec{q}}}. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Jetzt kommen wir zu dem Punkt, an dem im naiven Fall der NCQED die Ableitungen des Stern-Produktes mit dem Zeitordnungsoperator, bzw. mit der Heaviside-Funktion vertauscht werden, oder in unserem Fall, also bei der IPTO NCQED, eben gerade nicht. Um es nochmals deutlich zu sagen: Es werden nun zuerst die Ableitungen nach ξ , η , α und β ausgeführt und erst in (3.19) werden die Heaviside-Funktionen mit den Green'schen Funktionen zu einem Vierer-Integral zusammengefasst. Nach dem Ausführen der Ableitungen ergibt obige Amplitude

$$\begin{aligned} S_{\text{Bh}}^{(2)} = & -i e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \int \frac{dt}{2\pi} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \\ & \left[\left(\bar{u}(k_1) e^{ik_1x_1} \gamma^\mu e^{\frac{i}{2}[(ik_1 - iq)\theta(i k_2) + (ik_1)\theta(-iq)]} v(k_2) e^{ik_2x_1} \right. \right. \\ & \quad \left. \frac{g_{\mu\nu}}{2E_{\vec{q}}} \frac{1}{t + i\epsilon} e^{-it(x_1^0 - x_2^0)} e^{-iq(x_1 - x_2)} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{v}(p_2) e^{-i p_2 x_2} \gamma^\nu e^{\frac{i}{2} [(-i p_2 + i q) \theta(-i p_1) + (-i p_2) \theta(i q)]} u(p_1) e^{-i p_1 x_2} \\
& - \bar{v}(p_2) e^{-i p_2 x_1} \gamma^\mu e^{\frac{i}{2} [(-i p_2 - i q) \theta(i k_2) + (-i p_2) \theta(-i q)]} v(k_2) e^{i k_2 x_1} \\
& \quad \frac{g_{\mu\nu}}{2E_{\vec{q}}} \frac{1}{t + i\epsilon} e^{-i t(x_1^0 - x_2^0)} e^{-i q(x_1 - x_2)} \\
& \quad \bar{u}(k_1) e^{i k_1 x_2} \gamma^\nu e^{\frac{i}{2} [(i k_1 + i q) \theta(-i p_1) + (i k_1) \theta(i q)]} u(p_1) e^{-i p_1 x_2} \\
& + \left(\bar{u}(k_1) e^{i k_1 x_1} \gamma^\mu e^{\frac{i}{2} [(i k_1 - i q) \theta(i k_2) + (i k_1) \theta(-i q)]} v(k_2) e^{i k_2 x_1} \right. \\
& \quad \left. \frac{g_{\mu\nu}}{2E_{\vec{q}}} \frac{1}{t + i\epsilon} e^{-i t(x_2^0 - x_1^0)} e^{i q(x_1 - x_2)} \right. \\
& \bar{v}(p_2) e^{-i p_2 x_2} \gamma^\nu e^{\frac{i}{2} [(-i p_2 - i q) \theta(-i p_1) + (-i p_2) \theta(-i q)]} u(p_1) e^{-i p_1 x_2} \\
& - \bar{v}(p_2) e^{-i p_2 x_1} \gamma^\mu e^{\frac{i}{2} [(-i p_2 + i q) \theta(i k_2) + (-i p_2) \theta(i q)]} v(k_2) e^{i k_2 x_1} \\
& \quad \left. \frac{g_{\mu\nu}}{2E_{\vec{q}}} \frac{1}{t + i\epsilon} e^{-i t(x_2^0 - x_1^0)} e^{i q(x_1 - x_2)} \right. \\
& \left. \bar{u}(k_1) e^{i k_1 x_2} \gamma^\nu e^{\frac{i}{2} [(i k_1 - i q) \theta(-i p_1) + (i k_1) \theta(-i q)]} u(p_1) e^{-i p_1 x_2} \right) \Bigg]_{q^0 = E_{\vec{q}}} . \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Bevor wir die beiden Integrationen zusammenfassen, vereinfachen wir diese etwas unübersichtliche Gleichung. Dazu fassen wir die beiden runden Klammern zusammen, indem wir die Integrationsvariable t durch $-t$ substituieren. Die Integrationsgrenzen ändern sich dabei nicht, da über ganz $\mathbb{R}$ integriert wird. Mit dieser Änderung erhalten wir

$$\begin{aligned}
S_{\text{Bh}}^{(2)} &= -i e^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 \int \frac{dt}{2\pi} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \\
& \left[\left(\bar{u}(k_1) \gamma^\mu e^{\frac{i}{2} [-k_1 \theta k_2 + q \theta(k_2 - k_1)]} v(k_2) \bar{v}(p_2) \gamma^\nu e^{\frac{i}{2} [p_1 \theta p_2 + q \theta(p_1 - p_2)]} u(p_1) \right. \right. \\
& \quad \frac{g_{\mu\nu}}{2E_{\vec{q}}} \frac{1}{t + i\epsilon} e^{-i t(x_1^0 - x_2^0)} e^{-i q(x_1 - x_2)} e^{i(k_1 + k_2)x_1} e^{-i(p_1 + p_2)x_2} \\
& - \bar{v}(p_2) \gamma^\mu e^{\frac{i}{2} [p_2 \theta k_2 + q \theta(k_2 + p_2)]} v(k_2) \bar{u}(k_1) \gamma^\nu e^{\frac{i}{2} [k_1 \theta p_1 + q \theta(k_1 + p_1)]} u(p_1) \\
& \quad \left. \frac{g_{\mu\nu}}{2E_{\vec{q}}} \frac{1}{t + i\epsilon} e^{-i t(x_1^0 - x_2^0)} e^{-i q(x_1 - x_2)} e^{i(k_2 - p_2)x_1} e^{-i(k_1 - p_1)x_2} \right) \\
& + \left(\bar{u}(k_1) \gamma^\mu e^{\frac{i}{2} [-k_1 \theta k_2 - q \theta(k_2 - k_1)]} v(k_2) \bar{v}(p_2) \gamma^\nu e^{\frac{i}{2} [p_1 \theta p_2 - q \theta(p_1 - p_2)]} u(p_1) \right. \\
& \quad \frac{g_{\mu\nu}}{2E_{\vec{q}}} \frac{1}{-t + i\epsilon} e^{-i t(x_1^0 - x_2^0)} e^{i q(x_1 - x_2)} e^{i(k_1 + k_2)x_1} e^{-i(p_1 + p_2)x_2} \\
& - \bar{v}(p_2) \gamma^\mu e^{\frac{i}{2} [p_2 \theta k_2 - q \theta(k_2 + p_2)]} v(k_2) \bar{u}(k_1) \gamma^\nu e^{\frac{i}{2} [k_1 \theta p_1 - q \theta(k_1 + p_1)]} u(p_1) \\
& \quad \left. \frac{g_{\mu\nu}}{2E_{\vec{q}}} \frac{1}{-t + i\epsilon} e^{-i t(x_1^0 - x_2^0)} e^{i q(x_1 - x_2)} e^{i(k_2 - p_2)x_1} e^{-i(k_1 - p_1)x_2} u(p_1) \right) \Bigg]_{q^0 = E_{\vec{q}}} . \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt werden wir die zwei Integrationen über t und q zu einer Integration vereinigen. Ohne die unterschiedlichen Phasenfaktoren würde man den Feynman-Propagator (3.12) erhalten. Da wir aber wegen der IPTO unterschiedliche Phasen haben, ändert sich das Residuum des Propagators (siehe

oben). Nun definieren wir folgende Abkürzungen und Substitutionen

$$\begin{aligned}\lambda \vec{q}^0 &:= t + \lambda E_{\vec{q}} \quad \text{mit } \lambda = \{+, -\} \\ \lambda \vec{q} &= (q^0, \lambda \vec{q}) := (t + \lambda E_{\vec{q}}, \lambda \vec{q}) \quad \text{mit } \lambda = \{+, -\} \\ \lambda \hat{q} &:= (\lambda E_{\vec{q}}, \lambda \vec{q}) \quad \text{mit } \lambda = \{+, -\},\end{aligned}$$

wobei zu der zweiten Zeile noch zu sagen ist, dass die konstante Verschiebung der Integrationsvariablen q^0 bei der obigen Substitution um $\pm E_{\vec{q}}$ zulässig ist, da zum einen t bzw. q^0 über ganz $\mathbb{R}$ integriert wird und zum anderen die Konvergenz gesichert ist, da wir hier nur in Baumgraphennäherung rechnen. Mit diesen Definitionen erhält man nun das S -Matrizelement der Bhabha-Streuung in kompakter Form

$$\begin{aligned}S_{\text{Bh}}^{(2)} &= -i e^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \sum_{\lambda=-}^+ \\ &\left[\bar{u}(k_1) \gamma^\mu e^{\frac{i}{2}[-k_1 \theta k_2 + \lambda \hat{q} \theta (k_2 - k_1)]} v(k_2) \bar{v}(p_2) \gamma^\nu e^{\frac{i}{2}[p_1 \theta p_2 + \lambda \hat{q} \theta (p_1 - p_2)]} u(p_1) \right. \\ &\quad \frac{g_{\mu\nu}}{2E_{\vec{q}}} \frac{1}{\lambda q^0 - E_{\vec{q}} + i\epsilon} e^{i(k_1 + k_2 - \lambda \vec{q})x_1} e^{-i(p_1 + p_2 - \lambda \vec{q})x_2} \\ &\quad - \bar{v}(p_2) \gamma^\mu e^{\frac{i}{2}[p_2 \theta k_2 + \lambda \hat{q} \theta (k_2 + p_2)]} v(k_2) \bar{u}(k_1) \gamma^\nu e^{\frac{i}{2}[k_1 \theta p_1 + \lambda \hat{q} \theta (k_1 + p_1)]} u(p_1) \\ &\quad \left. \frac{g_{\mu\nu}}{2E_{\vec{q}}} \frac{1}{\lambda q^0 - E_{\vec{q}} + i\epsilon} e^{i(k_2 - p_2 - \lambda \vec{q})x_1} e^{-i(k_1 - p_1 - \lambda \vec{q})x_2} \right]. \quad (3.19)\end{aligned}$$

Wenn man nun über x_1 und x_2 integriert, erhält man δ -Distributionen, die als Argument unter anderem Impulse enthalten, die von λ abhängen. Da man bei dem Ausführen der Integration über diese δ -Distributionen leicht einen Fehler machen kann, sei anhand eines Beispiels die δ -Distribution für $\lambda = \pm$ explizit ausgeschrieben

$$\begin{aligned}\lambda = + : \quad & \delta^4(p_1 + p_2 - {}^+ \vec{q}) = \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{q}) \cdot \delta^{(1)}(p_1^0 + p_2^0 - q^0) \\ \lambda = - : \quad & \delta^4(p_1 + p_2 - {}^- \vec{q}) = \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{q}) \cdot \delta^{(1)}(p_1^0 + p_2^0 - q^0).\end{aligned}$$

Man beachte, dass sich das Vorzeichen in der $\delta^{(3)}$ -Distribution ändert. Nachdem man noch über q integriert hat, erhält man mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}q_s &= p_1 + p_2 = k_1 + k_2 \\ \lambda q_s &= (\lambda E_{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}, \vec{p}_1 + \vec{p}_2) = (\lambda E_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}, \vec{k}_1 + \vec{k}_2) \\ q_t &= p_1 + k_1 = p_2 + k_2 \\ \lambda q_t &= (\lambda E_{\vec{p}_1 + \vec{k}_1}, \vec{p}_1 + \vec{k}_1) = (\lambda E_{\vec{p}_2 + \vec{k}_2}, \vec{p}_2 + \vec{k}_2).\end{aligned}$$

das folgende Endergebnis

$$\begin{aligned}S_{\text{Bh}}^{(2)} &= -(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\ &\sum_{\lambda=-}^+ \bar{u}(k_1) \left(-i e \gamma^\mu e^{\frac{i}{2}[-k_1 \theta k_2 + \lambda q_s \theta (k_2 - k_1)]} \right) v(k_2)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
p & & r \\
& q & \\
& \mu &
\end{array}
\quad -i e \gamma^\mu e^{\frac{i}{2}[p\theta r + q\theta(r-p)]}$$

Abbildung 3.1: *Fermion-Boson-Vertex*

$$\begin{array}{c}
p \\
\frac{1}{2E_{\vec{p}}} \frac{-i g^{\mu\nu}}{\lambda p^0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon}
\end{array}$$

Abbildung 3.2: *Photon-Propagator*

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2E_{\vec{q}_s}} \frac{-i g_{\mu\nu}}{\lambda q_s^0 - E_{\vec{q}_s} + i\epsilon} \bar{v}(p_2) \left(-i e \gamma^\nu e^{\frac{i}{2}[p_1\theta p_2 + \lambda_{q_s}\theta(p_1-p_2)]} \right) u(p_1) \\
& + (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \sum_{\lambda=-}^+ \bar{v}(p_2) \left(-i e \gamma^\mu e^{\frac{i}{2}[p_2\theta k_2 + \lambda_{q_t}\theta(k_2+p_2)]} \right) v(k_2) \\
& \frac{1}{2E_{\vec{q}_t}} \frac{-i g_{\mu\nu}}{\lambda q_t^0 - E_{\vec{q}_t} + i\epsilon} \bar{u}(k_1) \left(-i e \gamma^\nu e^{\frac{i}{2}[k_1\theta p_1 + \lambda_{q_t}\theta(k_1+p_1)]} \right) u(p_1). \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Aus dem obigen Ergebnis kann man nun den Fermion-Boson-Vertex und den Photon-Propagator der IPTO NCQED ablesen. Wenn man alle Impulse einlaufend wählt, erhält man den in Abbildung 3.1 gezeigten Feynmangraphen. Der Photon-Propagator ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Wie man in Abbildung 3.1 sieht, ist die nicht-kommutative Phase $\frac{i}{2}[p\theta r + q\theta(r-p)]$ nicht symmetrisch unter dem Austausch von Fermion- und Photon-Impulsen. Unter dem Austausch der Fermion-Impulsen ändert sich nur das Vorzeichen der ganzen Phase, weswegen die Observablen invariant unter dem Fermion-Austausch bleiben.

Der zentrale Unterschied zwischen der naiven NCQED und der IPTO NCQED liegt auf der Ebene der Lagrangedichte natürlich darin, dass in IPTO die Ableitungen nicht mit dem Zeitordnungsoperator vertauscht werden. Auf der Ebene der Amplituden oder der Vertizes bedeutet das in IPTO NCQED, dass, zusätzlich zu der Änderung des Residuums, die Energieerhaltung in den nicht-kommutativen Phasen *nicht* mehr gültig ist. Dies kann man sich leicht verständlich machen, wenn man folgende „Anleitung“ für die Benutzung der Feynmanregeln betrachtet: Man erhält die gewünschte Amplitude (z.B. Gleichung 3.20), wenn man diese wie bei der gewöhnlichen QED aufschreibt, danach alle internen Impulse p durch λp ersetzt und anschließend über λ summiert. Gerade dieses Ersetzen der internen Impulse durch die mit λ verzierten Impulse, deren Nullkomponente die Energie eines auf der Massenschale befindlichen Teilchens

ist, bricht die Viererimpulserhaltung, oder genauer die Energieerhaltung, in den Phasen. Am Beispiel von dem in Abbildung 3.1 gezeigten Vertex sieht man für ein internes Photon q und zwei auf der Massenschale befindlichen Fermionen p und r , dass die Energieerhaltung im Allgemeinen nicht mehr gilt, da

$$\lambda_q = (\lambda E_{\vec{q}}, \vec{q}) = (\lambda |\vec{p} + \vec{r}|, -\vec{p} - \vec{r}) \neq (|\vec{p}|, -\vec{p}) + (|\vec{r}|, -\vec{r}) \quad \text{für } p, r \neq 0 \quad (3.21)$$

ist.

Im nächsten Abschnitt folgt die Berechnung des drei-Photon-Vertex, des Geist-Vertex und des Fermion-Propagators.

3.3 Compton-Streuung

In diesem Abschnitt werden wir anhand der Compton-Streuung den drei-Photon-Vertex, den Geist-Vertex und den Fermion-Propagator bestimmen können. Wie schon weiter oben erwähnt, produziert der nichtlineare Term $[A^\mu \star A^\nu]$ des Feldstärketensors unphysikalischen Polarisationszustände. Um diese Zustände entfernen zu können, muss man Geistfelder einführen, was mit dem Eichfixierungsterm (2.23) auch gemacht wurde. Es sei hier schon erwähnt, dass man die unphysikalischen Polarisationszustände auch dadurch entfernen kann, indem man die Summe über die Polarisationsvektoren ϵ^μ explizit durch physikalische Polarisationszustände ersetzt. Dies ist aber nur in niedrigster Ordnung Störungsrechnung möglich. Sobald man Schleifenrechnungen durchführt, benötigt man zwingend die Geistfelder.

Wenden wir uns nun der Berechnung der Streuamplitude der Compton-Streuung zu. Die S -Matrixelemente 2. Ordnung lauten

$$\begin{aligned} S_{\text{Co}}^{(2)}(e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma) &= -\frac{1}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \langle e^-(p_2) \gamma(k_2) | T [\mathcal{L}_I(x_1) \mathcal{L}_I(x_2)] | e^-(p_1) \gamma(k_1) \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \langle e^-(p_2) \gamma(k_2) | \\ &\quad T [(-i e (\partial_\mu A_\nu) \star [A^\mu \star A^\nu] - e \bar{\Psi} \star (\gamma^\mu A_\mu) \star \Psi)(x_1) \\ &\quad \cdot (-i e (\partial_\rho A_\sigma) \star [A^\rho \star A^\sigma] - e \bar{\Psi} \star (\gamma^\rho A_\rho) \star \Psi)(x_2)] | e^-(p_1) \gamma(k_1) \rangle \end{aligned} \quad (3.22)$$

und

$$\begin{aligned} S_{\text{Co}}^{(2)}(e^- c \rightarrow e^- c) &= -\frac{1}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \langle e^-(p_2) c(k_2) | \\ &\quad T [(-e \bar{\Psi} \star (\gamma^\mu A_\mu) \star \Psi + i e \bar{c} \star \partial_\mu [A^\mu \star c])(x_1) \\ &\quad \cdot (-e \bar{\Psi} \star (\gamma^\rho A_\rho) \star \Psi + i e \bar{c} \star \partial_\rho [A^\rho \star c])(x_2)] | e^-(p_1) c(k_1) \rangle, \end{aligned} \quad (3.23)$$

wobei nur die Summanden der Lagrangedichte mitgenommen wurden, die zur jeweiligen Amplitude beitragen. So trägt zum Beispiel kein Term des Produktes

der Lagrangedichten zur Compton-Streuung bei, der mehr als vier Photonfelder enthält. Die Berechnung erfolgt in drei Teilen. Zuerst werden wir sorgfältig den Fermion-Propagator berechnen, da die naive Annahme

$$\lambda S(p) \neq \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \frac{i(\not{p} + m)}{\lambda p^0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon} \quad (3.24)$$

nicht richtig ist! Dann folgt die Berechnung des, gegenüber der kommutativen QED neu hinzugekommene, drei-Photon-Vertex. Am Ende dieses Abschnitts wird dann noch der Geist-Vertex berechnet, den man aus der Amplitude (3.23) erhält.

Fangen wir also mit der Berechnung des Fermion-Propagators an. Man erhält, bis auf die Zeitordnung, den retardierten und avancierten Fermion-Propagator, indem man den Vakuumerwartungswert eines Antikommutators von Dirac-Spinor und Dirac-Anti-Spinor am Ort x bzw. y ausrechnet:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \{ \Psi(x), \bar{\Psi}(y) \} | 0 \rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s,r} \\ &\quad \langle 0 | a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ipx} + b_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ipx}, b_{\vec{q}}^r \bar{v}^r(q) e^{-iqy} + a_{\vec{q}}^{r\dagger} \bar{u}^r(q) e^{iqy} | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s,r} \\ &\quad (2\pi)^3 \delta^3(p - q) \delta^{sr} \left[u^s(p) \bar{u}^r(q) e^{-ipx + iqy} + v^s(p) \bar{v}^r(q) e^{-iqy + ipx} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left[\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) e^{-ip(x-y)} + \sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) e^{ip(x-y)} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left[(\not{p} + m) e^{-ip(x-y)} + (\not{p} - m) e^{ip(x-y)} \right]. \quad (3.25) \end{aligned}$$

Damit erhält man folgende retardierte und avancierte Green'sche Funktionen

$$^+S(x - y) := \tau(x^0 - y^0) i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} (^+\not{p} + m) e^{-i^+p(x-y)} \quad (3.26a)$$

$$\begin{aligned} ^-S(x - y) &:= \tau(y^0 - x^0) i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} (^+\not{p} - m) e^{i^+p(x-y)} \\ &\stackrel{\vec{p} \rightarrow -\vec{p}}{=} \tau(y^0 - x^0) i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-1}{2E_{\vec{p}}} (^-\not{p} + m) e^{-i^-p(x-y)}, \quad (3.26b) \end{aligned}$$

mit

$$\lambda p = (\lambda E_{\vec{p}}, \vec{p}) \quad \text{und} \quad \lambda = \{+, -\}.$$

Wenn man die Green'schen Funktionen (3.26) im Impulsraum schreiben will, muss man, wie im letzten Abschnitt, die Heaviside-Funktion als Integral schreiben (3.15) und die Integrationen über p und t aus (3.26) bzw. (3.15) zusammenfassen. Damit erhält man dann die retardierte (+) und avancierte (−) Green'sche Funktion im Impulsraum

$$\lambda S(p) := \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \frac{i(\lambda \not{p} + m)}{\lambda p^0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon} \quad (3.27)$$

Zur Überprüfung sei der Feynman-Propagator der kommutativen QED bestimmt, der sich aus der Summe der Propagatoren, jeweils für $\lambda = +$ und $\lambda = -$, ergeben sollte, was folgende Gleichung auch bestätigt.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left[\frac{i(\not{+p} + m)}{p^0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon} - \frac{i(\not{-p} + m)}{p^0 + E_{\vec{p}} - i\epsilon} \right] \\
&= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} [(\not{+p} + m)(p^0 + E_{\vec{p}}) - (\not{-p} + m)(p^0 - E_{\vec{p}})] \\
&= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} [(2E_{\vec{p}}p^0, 2\vec{p}E_{\vec{p}})^\mu \gamma_\mu + 2mE_{\vec{p}}] \\
&= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \equiv S_F(p) \quad (3.28)
\end{aligned}$$

In Abbildung 3.3 ist der Fermion-Propagator der IPTO NCQED nochmal graphisch gezeigt. Es sei angemerkt, dass die Schreibweise

$$p \qquad \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \frac{i(\not{\lambda p} + m)}{\lambda p^0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon}$$

Abbildung 3.3: *Fermion-Propagator*

$$\begin{aligned}
T [[\Psi_a(x), \bar{\Psi}_b(y)]] &= T [(i\not{\partial}_x + m)_{ab} [\Phi(x), \Phi(y)]] \\
&\neq (i\not{\partial}_x + m)_{ab} T [[\Phi(x), \Phi(y)]] \quad (3.29)
\end{aligned}$$

nur dann richtig ist, wenn man die Ableitung $\not{\partial}_x$ nicht mit der Zeitordnung vertauscht, da sonst

$$\begin{aligned}
& (i\not{\partial}_x + m)_{ab} \tau(x^0 - y^0) [\Phi(x), \Phi(y)] \\
&= (i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left(\frac{e^{-i\lambda\tilde{p}(x-y)}}{p^0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon} - \frac{e^{i\lambda\tilde{p}(x-y)}}{-p^0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon} \right) \Big|_{p^0=E_{\vec{p}}} \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left[(\not{\lambda p} + m)_{ab} \frac{e^{-i\lambda\tilde{p}(x-y)}}{p^0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon} \right. \\
&\quad \left. - (\not{\lambda p} - m)_{ab} \frac{e^{i\lambda\tilde{p}(x-y)}}{-p^0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon} \right] \Big|_{p^0=E_{\vec{p}}} \neq [\Psi_a(x), \bar{\Psi}_b(y)] \quad (3.30)
\end{aligned}$$

wäre.

In diesem Teil wollen wir den in der IPTO NCQED neu hinzugekommenen drei-Photon-Vertex berechnen. Hierzu tragen vier Terme der Lagrangedichte bei, die zwei Dirac-Felder und vier Photonfelder enthalten:

$$- [\bar{\Psi}(x_1) \star (\gamma^\mu A_\mu(x_1)) \star \Psi(x_1)] \cdot [(\partial_\rho A_\sigma(x_2) \star A^\rho(x_2) \star A^\sigma(x_2))]$$

$$\begin{aligned}
& + [\bar{\Psi}(x_1) \star (\gamma^\mu A_\mu(x_1)) \star \Psi(x_1)] \cdot [(\partial_\rho A_\sigma(x_2) \star A^\sigma(x_2) \star A^\rho(x_2))] \\
& - [(\partial_\mu A_\nu(x_1) \star A^\mu(x_1) \star A^\nu(x_1))] \cdot [\bar{\Psi}(x_2) \star (\gamma^\rho A_\rho(x_2)) \star \Psi(x_2)] \\
& + [(\partial_\mu A_\nu(x_1) \star A^\nu(x_1) \star A^\mu(x_1))] \cdot [\bar{\Psi}(x_2) \star (\gamma^\rho A_\rho(x_2)) \star \Psi(x_2)] . \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Die anderen Terme, die von dem nichtlinearen Teil des Feldstärketensors $F_{\mu\nu}$ kommen, haben mehr als vier Photon-Felder und tragen demnach nicht zur Compton-Streuung oder zum drei-Photon-Vertex bei. Das einzig Neue an der Rechnung ist das Vorhandensein von Ableitungskopplungen (derivative couplings). Hier kann man sich fragen, ob diese, wie bei der normalen QED, mit dem Zeitordnungsoperator vertauscht werden oder nicht. An dieser Stelle soll festgelegt werden, dass wir die Ableitungskopplungen nicht mit dem Zeitordnungsoperator vertauschen werden. Eine Begründung für diese Entscheidung, kann an dieser Stelle noch nicht gegeben werden. Sie soll aber in Kapitel 5 nachgereicht werden.

Nach längerer Rechnung, die ansonsten keine weiteren Schwierigkeiten aufweist, erhält man den in Abbildung 3.4 gezeigten Vertex. Wie man erwarten durfte,

$$\begin{array}{ccc}
\mu & \nu & -2e \left[g^{\mu\nu}(P-Q)^\rho + g^{\nu\rho}(Q-R)^\mu + g^{\rho\mu}(R-P)^\nu \right] \\
p & q & P^\mu = p^\mu \cdot e^{-\frac{i}{2}p\theta(q+r)} \sin\left(\frac{q\theta r}{2}\right) \\
& r & Q^\mu = q^\mu \cdot e^{-\frac{i}{2}q\theta(p+r)} \sin\left(\frac{r\theta p}{2}\right) \\
& \rho & R^\mu = r^\mu \cdot e^{-\frac{i}{2}r\theta(p+q)} \sin\left(\frac{p\theta q}{2}\right)
\end{array}$$

Abbildung 3.4: *drei-Photon-Vertex*

ist der obige Vertex vollständig symmetrisch unter dem Austausch zweier Photonen. Da hier, wie bei dem Fermion-Photon-Vertex, alle internen Impulse p durch $\lambda \vec{p}$ ersetzt werden, wird natürlich diese Symmetrie und vor allen Dingen die Energieerhaltung verletzt, sobald eines der Photonen ein internes virtuelles Photon ist. Eine direkte Folge der Tatsache, dass der Impuls in der Phase des Vertex nicht erhalten ist, ist die Verletzung der Ward-Identität, wie wir in Kapitel 5 sehen werden.

Wegen der Vollständigkeit sei noch angemerkt, dass die Impulse, die von den Ableitungskopplungen kommen, mit einem λ verziert werden, wenn man die Ableitungskopplungen mit dem Zeitordnungsoperator vertauscht oder entsprechend nicht, wenn die Ableitungskopplungen nicht mit dem Zeitordnungsoperator vertauscht werden.

Im letzten Teil soll der Geist-Photon-Vertex bestimmt werden, indem die Amplitude (3.23) berechnet wird. Von der Wechselwirkungs-Lagrangedichte sind nur zwei Terme relevant:

$$e \left(\bar{\Psi} \star (\gamma^\mu A_\mu) \star \Psi \right) (x) \quad \text{und} \quad i e \left(\bar{c} \star \partial_\mu [A^\mu \star c] \right) (x) . \quad (3.32)$$

Somit wird das S -Matrixelement aus (3.23)

$$\begin{aligned}
S_{\text{Co}}^{(2)}(e^-c \rightarrow e^-c) = & -\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle e^-(k_1)c(k_2) | \\
& T [i e^2 \bar{\Psi}(x_1) \star (\gamma^\mu A_\mu(x_1)) \star \Psi(x_1) \bar{c}(x_2) \star (\partial^\nu A_\nu(x_2)) \star c(x_2) \\
& + i e^2 \bar{\Psi}(x_1) \star (\gamma^\mu A_\mu(x_1)) \star \Psi(x_1) \bar{c}(x_2) \star A_\nu(x_2) \star (\partial^\nu c(x_2)) \\
& - i e^2 \bar{\Psi}(x_1) \star (\gamma^\mu A_\mu(x_1)) \star \Psi(x_1) \bar{c}(x_2) \star c(x_2) \star (\partial^\nu A_\nu(x_2)) \\
& - i e^2 \bar{\Psi}(x_1) \star (\gamma^\mu A_\mu(x_1)) \star \Psi(x_1) \bar{c}(x_2) \star (\partial^\nu c(x_2)) \star A_\nu(x_2) \\
& + i e^2 \bar{c}(x_1) \star (\partial^\nu A_\nu(x_1)) \star c(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \star (\gamma^\mu A_\mu(x_2)) \star \Psi(x_2) \\
& + i e^2 \bar{c}(x_1) \star A_\nu(x_1) \star (\partial^\nu c(x_1)) \bar{\Psi}(x_2) \star (\gamma^\mu A_\mu(x_2)) \star \Psi(x_2) \\
& - i e^2 \bar{c}(x_1) \star c(x_1) \star (\partial^\nu A_\nu(x_1)) \bar{\Psi}(x_2) \star (\gamma^\mu A_\mu(x_2)) \star \Psi(x_2) \\
& - i e^2 \bar{c}(x_1) \star (\partial^\nu c(x_1)) \star A_\nu(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \star (\gamma^\mu A_\mu(x_2)) \star \Psi(x_2)] \\
& | e^-(p_1)c(p_2) \rangle . \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Auch hier gibt es, analog zum drei-Photon-Vertex, die beiden Möglichkeiten die Ableitungen mit dem Zeitordnungsoperator zu vertauschen oder nicht - wobei man sich natürlich bei dem drei-Photon-Vertex und beim Geist-Photon-Vertex für jeweils eine Variante entscheiden muss. Nach kurzer Rechnung erhält man den in Abbildung 3.5 gezeigten Vertex, wobei sich, wie bei dem Fermion-Boson-Vertex, unter Austausch der Impulsen der Geist-Felder die Physik nicht ändert.

$$2i e (p+q)^\mu e^{-\frac{i}{2} r \theta(p+q)} \sin\left(\frac{p \theta q}{2}\right)$$

Abbildung 3.5: *Photon-Geist-Vertex*

Wenn man jetzt die Berechnungen in diesem Abschnitt zusammenfasst, erhält man für die S -Matrixelemente in 2. Ordnung der Compton-Streuung für IPTO NCQED

$$\begin{aligned}
S_{\text{Co}}^{(2)}(e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma) = & (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \sum_{\lambda=-}^+ \bar{u}(p_2) \left(-i e \gamma^\mu e^{\frac{i}{2} [-\lambda q_s \theta p_2 + k_2 \theta (\lambda q_s + p_2)]} \right) \epsilon_\mu^*(k_2) \\
& \frac{1}{2E_{\vec{q}_s}} \frac{i(\not{q}_s + m)}{\lambda q_s^0 - E_{\vec{q}_s} + i\epsilon} \epsilon_\nu(k_1) \left(-i e \gamma^\nu e^{\frac{i}{2} [-p_1 \theta \lambda q_s - k_1 \theta (\lambda q_s + p_1)]} \right) u(p_1) \\
& + (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - k_2 + k_1 - p_2) \sum_{\lambda=-}^+ \bar{u}(p_2) \left(-i e \gamma^\mu e^{\frac{i}{2} [-\lambda q_u \theta p_2 - k_1 \theta (\lambda q_u + p_2)]} \right) \epsilon_\mu(k_1) \\
& \frac{1}{2E_{\vec{q}_u}} \frac{i(\not{q}_u + m)}{\lambda q_u^0 - E_{\vec{q}_u} + i\epsilon} \epsilon_\nu^*(k_2) \left(-i e \gamma^\nu e^{\frac{i}{2} [-p_1 \theta \lambda q_u + k_2 \theta (\lambda q_s + p_1)]} \right) u(p_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \sum_{\lambda=-}^+ \bar{u}(p_2) \left(-i e \gamma^\mu e^{\frac{i}{2}[-p_1 \theta p_2 + \lambda_{qt} \theta(p_1 + p_2)]} \right) u(p_1) \\
& \frac{1}{2E_{\vec{q}_t}} \frac{i g_{\mu\nu}}{\lambda q_t^0 - E_{\vec{q}_t} + i\epsilon} \\
& \epsilon_\sigma^*(k_2) \left(-2e [g^{\rho\sigma} (K_1 - K_2)^\nu + g^{\sigma\nu} (K_2 - Q)^\rho + g^{\nu\rho} (Q - K_1)^\sigma] \right) \epsilon_\rho(k_1) \quad (3.34a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& S_{\text{Co}}^{(2)}(e^- c \rightarrow e^- c) = \\
& i (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \sum_{\lambda=-}^+ \bar{u}(p_2) \left(-i e \gamma^\mu e^{\frac{i}{2}[-p_1 \theta p_2 + \lambda_{qt} \theta(p_1 + p_2)]} \right) u(p_1) \\
& \frac{1}{2E_{\vec{q}_t}} \frac{i g_{\mu\nu}}{\lambda q_t^0 - E_{\vec{q}_t} + i\epsilon} \left[2i e^\lambda (k_1^\nu + q_t^\nu) \sin \left(\frac{-k_1 \theta k_2 + \lambda_{qt} \theta(k_1 + k_2)}{2} \right) \right] \quad (3.34b)
\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
K_1^\mu &= k_1^\mu \cdot e^{-\frac{i}{2} k_1 \theta (k_2 + \lambda_{qt})} \sin \left(\frac{k_2 \theta \lambda_{qt}}{2} \right) \\
K_2^\mu &= k_2^\mu \cdot e^{-\frac{i}{2} k_2 \theta (k_1 + \lambda_{qt})} \sin \left(\frac{\lambda_{qt} \theta k_1}{2} \right) \\
Q^\mu &= q_t^\mu \cdot e^{-\frac{i}{2} \lambda_{qt} \theta (k_1 + k_2)} \sin \left(\frac{k_1 \theta k_2}{2} \right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
q_s &= p_1 + k_1 = p_2 + k_2 \\
q_t &= p_1 + p_2 = k_1 + k_2 \\
q_u &= p_1 + k_2 = k_1 + p_2 \\
\lambda_p &= (\lambda p^0, \vec{p}).
\end{aligned}$$

Auch hier sei angemerkt, dass der interne Impuls q_t^μ , der in der Abkürzung Q^μ steht, ein λ erhält, also zu λq_t^μ wird, wenn man die Ableitungskopplungen mit dem Zeitordnungsoperator T vertauscht.

3.4 Vier-Photon-Vertex und Geist-Propagator

Die noch verbleibende Aufgabe besteht darin, den vier-Photon-Vertex und den Geist-Propagator zu berechnen. Beginnen wollen wir mit der Berechnung des Vertex, den man über das S -Matrixelements 1. Ordnung erhält

$$\begin{aligned}
S^{(1)}(\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma) &= \langle \gamma\gamma | i \int d^4x \mathcal{L}_I | \gamma\gamma \rangle \\
&= -i \frac{e^2}{4} \langle \gamma\gamma | [A_\mu \star A_\nu] \star [A^\mu \star A^\nu] | \gamma\gamma \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
\mu & p & q & \nu
\end{array} \\
4i e^2 \left[\cos \left(\frac{(p+q)\theta(r+s)}{2} \right) \sin \left(\frac{p\theta q}{2} \right) \sin \left(\frac{r\theta s}{2} \right) \right. \\
\qquad \qquad \qquad (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\
\qquad \qquad \qquad + \cos \left(\frac{(r+p)\theta(q+s)}{2} \right) \sin \left(\frac{r\theta p}{2} \right) \sin \left(\frac{q\theta s}{2} \right) \\
\begin{array}{cccc}
\sigma & s & r & \rho
\end{array} \\
\qquad \qquad \qquad (g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}) \\
\qquad \qquad \qquad + \cos \left(\frac{(p+s)\theta(q+r)}{2} \right) \sin \left(\frac{p\theta s}{2} \right) \sin \left(\frac{q\theta r}{2} \right) \\
\qquad \qquad \qquad (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \left. \right]
\end{array}$$

Abbildung 3.6: vier-Photon-Vertex

$$\begin{array}{c}
p \\
\frac{1}{2E_{\vec{p}}} \frac{i}{\lambda p^0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon}
\end{array}$$

Abbildung 3.7: Geist-Propagator

$$= -i \frac{e^2}{2} \langle \gamma\gamma | A_\mu \star A_\nu \star A^\mu \star A^\nu - A_\mu \star A_\nu \star A^\nu \star A^\mu | \gamma\gamma \rangle, \quad (3.35)$$

wobei nach dem zweiten Gleichheitszeichen nur die relevanten Terme, also diejenigen Terme, die genau vier Photonfelder haben, mitgenommen wurden. Nach einer etwas mühseligen Rechnung erhält man für den in Abbildung 3.6 gezeigten vier-Photon-Vertex. Es ist offensichtlich, dass dieser vier-Photon-Vertex vollkommen symmetrisch unter dem Austausch der Photonimpulse ist, solange man diese Symmetrie nicht explizit dadurch bricht, dass man ein reelles Photon zu einem virtuellen Photon macht.

Der Geist-Propagator ist schnell behandelt. Man kann sich leicht überlegen, dass der Geist-Propagator, der nichts anderes ist als der Propagator eines skalaren Teilchens, die in Abbildung 3.7 gezeigte Form haben muss.

Nun haben wir alle Propagatoren und Vertizes der IPTO NCQED beisammen, mit denen wir im nächsten Kapitel konkrete Wirkungsquerschnitte berechnen werden.

Zum Schluss sei nochmals der entscheidende Punkt dieses Kapitels dargelegt. Da durch die IPTO alle Impulse p^μ von internen oder virtuellen Teilchen durch die entsprechenden Impulse λp^μ ersetzt werden, ist sowohl die Symmetrie der

an dem Vertex beteiligten Teilchen gebrochen, als auch die Energieerhaltung in den nicht-kommutativen Phasen verletzt. Dies ist einerseits das Besondere an der IPTO NCQED, aber auch das entscheidende Problem dieser Theorie, da, wie schon erwähnt, gerade diese Verletzung der Energieerhaltung dazu führt, dass die Ward-Identität der IPTO NCQED nicht erfüllt werden kann. Mehr zu dieser Problematik in Kapitel 5.

Abschließend sind auf der nächsten Seite alle Feynmanregeln der IPTO NCQED zusammengefasst dargestellt.

$$\frac{1}{2E_{\vec{p}}} \frac{i(\lambda \vec{p} + m)}{\lambda p^0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon}$$

$$\frac{1}{2E_{\vec{p}}} \frac{-i g^{\mu\nu}}{\lambda p^0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon}$$

$$\frac{1}{2E_{\vec{p}}} \frac{i}{\lambda p^0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon}$$

$$-i e \gamma^\mu e^{\frac{i}{2}[p\theta r + q\theta(r-p)]}$$

$$-2e [g^{\mu\nu}(\tilde{p} - \tilde{q})^\rho + g^{\nu\rho}(\tilde{q} - \tilde{r})^\mu + g^{\rho\mu}(\tilde{r} - \tilde{p})^\nu]$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}^\mu &= p^\mu \cdot e^{-\frac{i}{2}p\theta(q+r)} \sin\left(\frac{q\theta r}{2}\right) \\ \tilde{q}^\mu &= q^\mu \cdot e^{-\frac{i}{2}q\theta(p+r)} \sin\left(\frac{r\theta p}{2}\right) \\ \tilde{r}^\mu &= r^\mu \cdot e^{-\frac{i}{2}r\theta(p+q)} \sin\left(\frac{p\theta q}{2}\right) \end{aligned}$$

$$2i e (p + q)^\mu e^{-\frac{i}{2}q\theta(p+r)} \sin\left(\frac{p\theta r}{2}\right)$$

$$4i e^2 \left[\cos\left(\frac{(p+q)\theta(r+s)}{2}\right) \sin\left(\frac{p\theta q}{2}\right) \sin\left(\frac{r\theta s}{2}\right) \right. \\ \left. (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \right. \\ \left. + \cos\left(\frac{(r+p)\theta(q+s)}{2}\right) \sin\left(\frac{r\theta p}{2}\right) \sin\left(\frac{q\theta s}{2}\right) \right. \\ \left. (g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}) \right. \\ \left. + \cos\left(\frac{(p+s)\theta(q+r)}{2}\right) \sin\left(\frac{p\theta s}{2}\right) \sin\left(\frac{q\theta r}{2}\right) \right. \\ \left. (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \right]$$

Abbildung 3.8: Feynmanregeln der IPTO NCQED

Kapitel 4

Wirkungsquerschnitte

In diesem Kapitel soll die wichtigste Observable in der Teilchenphysik, der differentielle Wirkungsquerschnitt, für die Bhabha-, Møller- und Compton-Streuung berechnet werden. Das Besondere wird sein, dass sich das Residuum der Feynman-Propagatoren, wie es im vorherigen Kapitel schon angesprochen wurde, relativ zu der kommutativen bzw. naiven nicht-kommutativen QED, in der hier behandelten IPTO NCQED ändern wird. Wie wir sehen werden, ist die Änderung des Residuums natürlich auch eine direkte Folge der Wechselwirkungspunkt-Zeitordnung.

Im ersten Abschnitt wird, wieder anhand der Bhabha-Streuung, sehr ausführlich der differentielle Wirkungsquerschnitt berechnet, um dem Leser die Möglichkeit zu geben, die Rechnungen im Detail nachvollziehen zu können. Im darauffolgenden Abschnitt wird dann recht kurz der Wirkungsquerschnitt der Møller-Streuung berechnet, der als Neuerung zur Bhabha-Streuung einen u -Kanal aufweist. Im letzten Abschnitt wird dann der recht aufwendig zu berechnende differentielle Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung bestimmt. Hier wird sich zeigen, dass der Wirkungsquerschnitt, wenn man die unphysikalischen Polarisationszustände mit den Geist-Termen zu entfernen versucht, negativ wird. Die Ursache liegt, wie schon im letzten Kapitel erwähnt, in der Verletzung der Ward-Identität, wie wir in Kapitel 5 sehen werden.

4.1 Bhabha-Streuung

Beginnen werden wir mit der ausführlichen Berechnung des Wirkungsquerschnitts der Bhabha-Streuung. Mit den Feynmangraphen in Abbildung 3.8 kann man formal die Amplitude der Bhabha-Streuung darstellen. Die Frage ist nun, wie man die Zeitordnung graphisch umsetzt. Wir folgen der in [14] verwendeten Darstellung, bei der eine Zeitrichtung eingeführt wird, wobei weiter oben liegende Vertizes zeitlich nach den darunterliegenden Vertizes stehen, was der Pfeil am rechten Rand symbolisieren soll. Da wir jetzt für jeden Feynmangraphen der kommutativen QED genau zwei zeitgeordnete

Feynmangraphen in der IPTO NCQED haben, einen für $\lambda = +$ und einen für $\lambda = -$, haben wir insgesamt vier Graphen, jeweils zwei für s - und t -Kanal. Wenn man nun die Amplitude (3.20) visualisiert, erhält man die in Abbildung 4.1 gezeigten Graphen. Da man auf der Ebene der Amplituden sich im

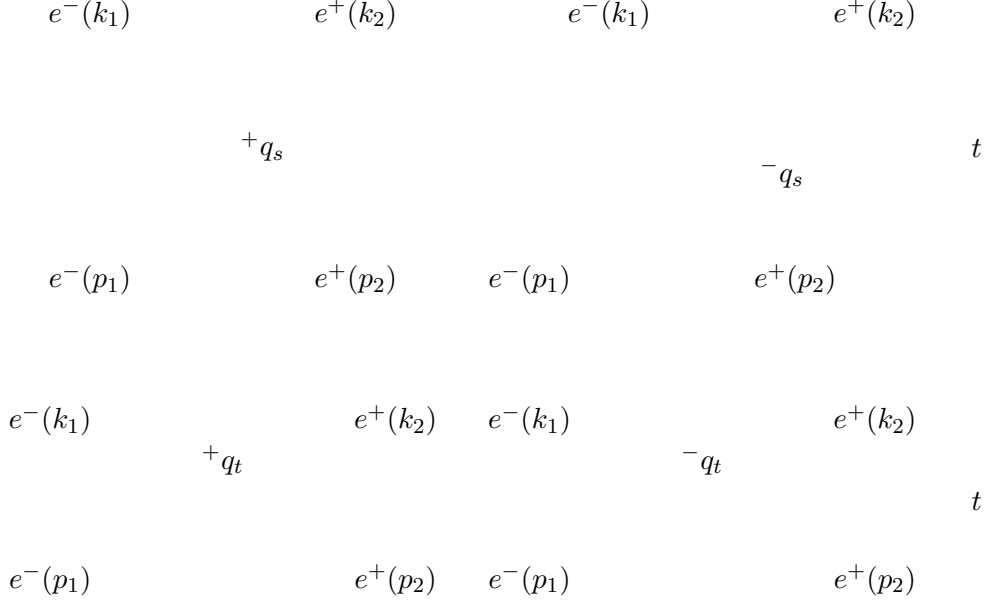


Abbildung 4.1: Feynmangraphen der Bhabha-Streuung

Impulsraum und nicht im Ortsraum befindet, kann man auch die Zeitrichtung als den Energiefluss interpretieren, wobei der positive Frequenzanteil von unten nach oben und der negative Frequenzanteil von oben nach unten läuft. Mit dieser Interpretation sieht man auch sofort, dass Teilchen, die dem positiven Frequenzanteil entsprechen, bezüglich der Antiteilchen, die dem negativen Frequenzanteil entsprechen, unterschiedliche nicht-kommutative Phasen tragen, also nicht mehr äquivalent behandelt werden. Diese unterschiedlichen Phasen für Teilchen und Antiteilchen führen dann zur Änderung des Residuums der Feynman-Propagatoren, wie wir gleich sehen werden.

Im folgenden Unterabschnitt beginnen wir mit der Berechnung des Wirkungsquerschnitts, indem wir zuerst über λ summieren.

4.1.1 Summation über λ

Anhand der obigen Feynmangraphen oder einfach aus (3.20), bekommen wir für die Bhabha-Streuung folgende Amplitude

$$i\mathcal{M}_{\text{Bh}}^{(2)} = \sum_{\lambda=\pm}^+ \bar{u}(k_1) \left(-i e \gamma^\mu e^{\frac{i}{2}[-k_1 \theta_{k_2} + \lambda q_s \theta(k_2 - k_1)]} \right) v(k_2) \\ \frac{1}{2E_{\vec{q}_s}} \frac{-i g_{\mu\nu}}{\lambda q_s^0 - E_{\vec{q}_s} + i\epsilon} \bar{v}(p_2) \left(-i e \gamma^\nu e^{\frac{i}{2}[p_1 \theta_{p_2} + \lambda q_s \theta(p_1 - p_2)]} \right) u(p_1)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\lambda=-}^{+} \bar{v}(p_2) \left(-i e \gamma^\mu e^{\frac{i}{2} [p_2 \theta k_2 + \lambda_{qt} \theta (k_2 + p_2)]} \right) v(k_2) \\
& \frac{1}{2E_{\vec{q}_t}} \frac{-i g_{\mu\nu}}{\lambda q_t^0 - E_{\vec{q}_t} + i\epsilon} \bar{u}(k_1) \left(-i e \gamma^\nu e^{\frac{i}{2} [k_1 \theta p_1 + \lambda_{qt} \theta (k_1 + p_1)]} \right) u(p_1), \quad (4.1)
\end{aligned}$$

mit den Impulsen λ_{qs} und λ_{qt} für das virtuelle Photon im s - bzw. t -Kanal:

$$\begin{aligned}
q_s &= p_1 + p_2 = k_1 + k_2 & \lambda_{qs} &= (\lambda E_{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}, \vec{p}_1 + \vec{p}_2) = (\lambda E_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}, \vec{k}_1 + \vec{k}_2) \neq q_s \\
q_t &= p_1 + k_1 = p_2 + k_2 & \lambda_{qt} &= (\lambda E_{\vec{p}_1 + \vec{k}_1}, \vec{p}_1 + \vec{k}_1) = (\lambda E_{\vec{p}_2 + \vec{k}_2}, \vec{p}_2 + \vec{k}_2) \neq q_t.
\end{aligned}$$

Bevor wir die Summation über λ durchführen, trennen wir der Einfachheit halber alle Terme die von λ abhängen von den übrigen Termen. Deswegen klammern wir zuerst alle Faktoren aus, die trivial nicht von λ abhängen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{Bh}}^{(2)} &= e^2 \bar{u}(k_1) \gamma^\mu v(k_2) \bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) e^{\frac{i}{2} [p_1 \theta p_2 - k_1 \theta k_2]} \\
& \frac{1}{2E_{\vec{q}_s}} \left(\frac{1}{q_s^0 - E_{\vec{q}_s} + i\epsilon} e^{\frac{i}{2} + q_s \theta (p_1 - k_1 + k_2 - p_2)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{-q_s^0 - E_{\vec{q}_s} + i\epsilon} e^{\frac{i}{2} - q_s \theta (p_1 - k_1 + k_2 - p_2)} \right) \\
& - e^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu v(k_2) \bar{u}(k_1) \gamma_\mu u(p_1) e^{\frac{i}{2} [p_2 \theta k_2 - p_1 \theta k_1]} \\
& \frac{1}{2E_{\vec{q}_t}} \left(\frac{1}{q_t^0 - E_{\vec{q}_t} + i\epsilon} e^{\frac{i}{2} + q_t \theta (p_1 + k_1 + p_2 + k_2)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{-q_t^0 - E_{\vec{q}_t} + i\epsilon} e^{\frac{i}{2} - q_t \theta (p_1 + k_1 + p_2 + k_2)} \right). \quad (4.2)
\end{aligned}$$

Da in der Größe $\lambda_q \theta l$ nur einer von vier Summanden von λ abhängt, spaltet man diese Größe auf. So ist

$$\frac{1}{2} \lambda_q \theta l = \frac{1}{2} \lambda E_{\vec{q}} \theta_{0i} l^i + \frac{1}{2} q^i \theta_{i\mu} l^\mu =: \lambda \alpha_q^0 + \alpha_q^3,$$

wobei $i \in \{1, 2, 3\}$ und $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ ist. Zur Notation sei angemerkt, dass der Index „0“ oder „3“ an der Größe α andeuten soll, dass die Zeitkomponente bzw. die Raumkomponente des links stehenden Impulses λ_q in der Größe α enthalten ist. Mit dieser Notation kann man nun alle Terme, die nicht von λ abhängen, aus der Klammer herausziehen, womit man bei

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{Bh}}^{(2)} &= e^2 \bar{u}(k_1) \gamma^\mu v(k_2) \bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) e^{\frac{i}{2} [p_1 \theta p_2 - k_1 \theta k_2]} e^{i \alpha_s^3} \\
& \frac{1}{2E_{\vec{q}_s}} \left(\frac{1}{q_s^0 - E_{\vec{q}_s} + i\epsilon} e^{i \alpha_s^0} + \frac{1}{-q_s^0 - E_{\vec{q}_s} + i\epsilon} e^{-i \alpha_s^0} \right) \\
& - e^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu v(k_2) \bar{u}(k_1) \gamma_\mu u(p_1) e^{\frac{i}{2} [p_2 \theta k_2 - p_1 \theta k_1]} e^{i \alpha_t^3} \\
& \frac{1}{2E_{\vec{q}_t}} \left(\frac{1}{q_t^0 - E_{\vec{q}_t} + i\epsilon} e^{i \alpha_t^0} + \frac{1}{-q_t^0 - E_{\vec{q}_t} + i\epsilon} e^{-i \alpha_t^0} \right), \quad (4.3)
\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}\alpha_s^0 &= \frac{1}{2} E_{\vec{q}_s} \theta_{0i} (p_1 - k_1 + k_2 - p_2)^i & \alpha_s^3 &= \frac{1}{2} q_s^i \theta_{i\mu} (p_1 - k_1 + k_2 - p_2)^\mu \\ \alpha_t^0 &= \frac{1}{2} E_{\vec{q}_t} \theta_{0i} (p_1 + k_1 + p_2 + k_2)^i & \alpha_t^3 &= \frac{1}{2} q_t^i \theta_{i\mu} (p_1 + k_1 + p_2 + k_2)^\mu,\end{aligned}$$

angelangt ist. Jetzt kann man die Addition ausführen, was am Beispiel des s -Kanals gezeigt werden soll:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2E_{\vec{q}_s}} \left(\frac{1}{q_s^0 - E_{\vec{q}_s} + i\epsilon} e^{i\alpha_s^0} + \frac{1}{-q_s^0 - E_{\vec{q}_s} + i\epsilon} e^{-i\alpha_s^0} \right) \\ &= \frac{1}{2E_{\vec{q}_s}} \frac{1}{(q_s^0 + E_{\vec{q}_s})(q_s^0 - E_{\vec{q}_s}) + i\epsilon} \left[(q_s^0 + E_{\vec{q}_s}) e^{i\alpha_s^0} - (q_s^0 - E_{\vec{q}_s}) e^{-i\alpha_s^0} \right] \\ &= \frac{1}{q_s^2 + i\epsilon} \left[\cos \alpha_s^0 + i \frac{q_s^0}{E_{\vec{q}_s}} \sin \alpha_s^0 \right]. \quad (4.4)\end{aligned}$$

Wie man an dieser Stelle sieht, ist das Residuum des Feynman-Photon-Propagators nicht mehr 1 sondern $[\cos \alpha_s^0 + i \frac{q_s^0}{E_{\vec{q}_s}} \sin \alpha_s^0]$. Da nun ein Summand des Residuums komplex ist, ändert das auch den Imaginärteil der Amplitude. In [15] wurde gezeigt, dass tatsächlich in der IPTO NCQFT, im Gegensatz zur naiven NCQFT, das optische Theorem wegen diesem imaginären Term erfüllt ist. Somit hat sich die Hoffnung bestätigt, das Unitaritätsproblem der naiven NCQFT, für Raum-Zeit Nicht-Kommutativität, also für $\theta_{0i} \neq 0$, zu lösen.

Zusammengefasst kann man sagen: Wenn man die Ableitungen des Stern-Produktes nicht mit dem Zeitordnungsoperator vertauscht, erhält man an den Vertizes Phasen, in denen die Energieerhaltung nicht gilt. Dies führt dann zu unterschiedlichen Phasen in den Vertizes für Teilchen und Anti-Teilchen, was wiederum ursächlich für das geänderte Residuum ist. Dieses geänderte Residuum, insbesondere der komplexe Term, führt dann letzten Endes dazu, dass das optische Theorem in der IPTO NCQFT erfüllt ist. Dies gab Anlass zur Hoffnung, dass auch bei Eichtheorien, und im Speziellen bei der NCQED, das Problem mit der Unitarität behoben ist.

Mit dem in (4.4) gewonnenen Ergebnis, lässt sich die Amplitude der Bhabha-Streuung recht kompakt schreiben

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\text{Bh}}^{(2)} &= e^2 \bar{u}(k_1) \gamma^\mu v(k_2) \bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) e^{i\beta_s} e^{i\alpha_s^3} \frac{1}{q_s^2 + i\epsilon} [\cos \alpha_s^0 + i f_s \sin \alpha_s^0] \\ &\quad - e^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu v(k_2) \bar{u}(k_1) \gamma_\mu u(p_1) e^{i\beta_t} e^{i\alpha_t^3} \frac{1}{q_t^2 + i\epsilon} [\cos \alpha_t^0 + i f_t \sin \alpha_t^0], \quad (4.5)\end{aligned}$$

wobei nochmals zusammengefasst

$$\begin{aligned}
q_s &= p_1 + p_2 = k_1 + k_2 & q_t &= p_1 + k_1 = p_2 + k_2 \\
\alpha_s^0 &= \frac{1}{2} E_{\vec{q}_s} \theta_{0i} (p_1 - k_1 + k_2 - p_2)^i & \alpha_t^0 &= \frac{1}{2} E_{\vec{q}_t} \theta_{0i} (p_1 + k_1 + p_2 + k_2)^i \\
\alpha_s^3 &= \frac{1}{2} q_s^i \theta_{i\mu} (p_1 - k_1 + k_2 - p_2)^\mu & \alpha_t^3 &= \frac{1}{2} q_t^i \theta_{i\mu} (p_1 + k_1 + p_2 + k_2)^\mu \\
\beta_s &= \frac{1}{2} [p_1 \theta p_2 - k_1 \theta k_2] = \frac{1}{2} [p_1 \theta k_1 - p_2 \theta k_2] & \beta_t &= \frac{1}{2} [-p_1 \theta k_1 + p_2 \theta k_2] = -\beta_s \\
f_s &= \frac{q_s^0}{E_{\vec{q}_s}} & f_t &= \frac{q_t^0}{E_{\vec{q}_t}}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

ist. Eine weitere Anmerkung zur Notation: Alle Phasen, die von der IPTO herrühren und die interne Impulse q beinhalten, werden mit α bezeichnet, alle anderen Winkel, die also nur von den äußeren Impulsen abhängen, werden mit β bezeichnet. Wenn man nun die Komponenten $\theta_{0i} = 0$ setzt, werden alle Winkel $\alpha^0 \equiv 0$. So kann man leicht den Übergang von $\theta_{0i} \neq 0 \rightarrow \theta_{0i} = 0$ nachvollziehen. Man sieht zum Beispiel an 4.4, dass das Residuum für $\alpha_s^0 = 0$ zu dem Residuum der naiven NCQED, also gleich eins, wird.

4.1.2 Quadrierte Amplitude

Die nächste Aufgabe in der Berechnung des Wirkungsquerschnitts ist das Quadrieren der komplexen Amplitude (4.5), was nichts anderes ist, als die Amplitude mit der entsprechenden komplex-konjugierten Amplitude von sich selbst zu multiplizieren. Anschließend werden dann die Spuren über die γ -Matrizen ausgeführt, was hier nicht im Detail vorgeführt werden soll (für diese Berechnungen, siehe z.B. [8]). Mit den folgenden Größen

$$\mathcal{M}_s = e^2 \bar{u}(k_1) \gamma^\mu v(k_2) \bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) e^{i\beta_s} e^{i\alpha_s^3} \frac{1}{q_s^2 + i\epsilon} [\cos \alpha_s^0 + i f_s \sin \alpha_s^0] \tag{4.7a}$$

$$\mathcal{M}_s^* = e^2 \bar{u}(p_1) \gamma^\mu v(p_2) \bar{v}(k_2) \gamma_\mu u(k_1) e^{-i\beta_s} e^{-i\alpha_s^3} \frac{1}{q_s^2 - i\epsilon} [\cos \alpha_s^0 - i f_s \sin \alpha_s^0] \tag{4.7b}$$

$$\mathcal{M}_t = -e^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu v(k_2) \bar{u}(k_1) \gamma_\mu u(p_1) e^{i\beta_t} e^{i\alpha_t^3} \frac{1}{q_t^2 + i\epsilon} [\cos \alpha_t^0 + i f_t \sin \alpha_t^0] \tag{4.7c}$$

$$\mathcal{M}_t^* = -e^2 u(p_1) \gamma^\mu \bar{u}(k_1) v(k_2) \gamma_\mu \bar{v}(p_2) e^{-i\beta_t} e^{-i\alpha_t^3} \frac{1}{q_t^2 - i\epsilon} [\cos \alpha_t^0 - i f_t \sin \alpha_t^0], \tag{4.7d}$$

lässt sich das Quadrieren der gesamten Amplitude in die Berechnung der vier Produkte $\mathcal{M}_s \cdot \mathcal{M}_s^*$, $\mathcal{M}_s \cdot \mathcal{M}_t^*$, $\mathcal{M}_t \cdot \mathcal{M}_s^*$ und $\mathcal{M}_t \cdot \mathcal{M}_t^*$ unterteilen.

Wenn man das erste Produkt explizit ausschreibt, erhält man folgende Summe

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} \mathcal{M}_s \cdot \mathcal{M}_s^*$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} e^4 \frac{1}{s^2} \bar{u}(k_1) \gamma^\mu v(k_2) \bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) \\
&\quad \bar{u}(p_1) \gamma^\nu v(p_2) \bar{v}(k_2) \gamma_\nu u(k_1) [\cos^2 \alpha_s^0 + f_s^2 \sin^2 \alpha_s^0], \quad (4.8)
\end{aligned}$$

wobei die Summe über die Spins eine Spur über die dann verbleibenden γ -Matrizen ergibt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\text{Spins}} \bar{u}(k_1) \gamma^\mu v(k_2) \bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu v(p_2) \bar{v}(k_2) \gamma_\nu u(k_1) \\
&= \text{tr} [(\not{k}_1 + m) \gamma^\mu (\not{k}_2 - m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}_2 - m) \gamma_\nu] \stackrel{m_e \rightarrow 0}{=} 8 (t^2 + u^2). \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Da Beschleunigerexperimente für nicht-kommutative Physik bei Energien im TeV Bereich stattfinden werden, ist hier nur der differentielle Wirkungsquerschnitt für den masselosen Limes angegeben. Die Größen s , t und u sind die Mandelstam-Variablen, die bei der Bhabha-Streuung, ebenfalls für den masselosen Limes, wie folgt von den externen Impulsen abhängt

$$s := q_s^2 = 2p_1 p_2 = 2k_1 k_2 \quad t := q_t^2 = 2p_1 k_1 = 2p_2 k_2 \quad u := 2p_1 k_2 = 2p_2 k_1$$

Mit dem obigen Resultat für die Spur, erhält man für die quadrierte Amplitude des s -Kanals das Ergebnis

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} \mathcal{M}_s \cdot \mathcal{M}_s^* = 2e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2} [\cos^2 \alpha_s^0 + f_s^2 \sin^2 \alpha_s^0], \quad (4.10)$$

und für die quadrierte Amplitude des t -Kanals, deren Berechnung äquivalent zu der des s -Kanals ist, erhält man

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} \mathcal{M}_t \cdot \mathcal{M}_t^* = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2} [\cos^2 \alpha_t^0 + f_t^2 \sin^2 \alpha_t^0]. \quad (4.11)$$

Die noch ausstehenden Interferenz-Terme, deren Berechnung auch keine weiteren Schwierigkeiten aufweisen, ergeben

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} (\mathcal{M}_s \cdot \mathcal{M}_t^* + \mathcal{M}_t \cdot \mathcal{M}_s^*) = 2e^4 \frac{u^2}{s \cdot t} \\
&\quad \left[(\cos \alpha_s^0 \cos \alpha_t^0 + f_s f_t \sin \alpha_s^0 \sin \alpha_t^0) \left(e^{i(\beta_s - \beta_t + \alpha_s^3 - \alpha_t^3)} + e^{-i(\beta_s - \beta_t + \alpha_s^3 - \alpha_t^3)} \right) \right. \\
&\quad \left. - i (f_t \cos \alpha_s^0 \sin \alpha_t^0 - f_s \sin \alpha_s^0 \cos \alpha_t^0) \left(e^{i(\beta_s - \beta_t + \alpha_s^3 - \alpha_t^3)} - e^{-i(\beta_s - \beta_t + \alpha_s^3 - \alpha_t^3)} \right) \right] \\
&= 4e^4 \frac{u^2}{s \cdot t} \left[(\cos \alpha_s^0 \cos \alpha_t^0 + f_s f_t \sin \alpha_s^0 \sin \alpha_t^0) \cos (\beta_s - \beta_t + \alpha_s^3 - \alpha_t^3) \right. \\
&\quad \left. + (f_t \cos \alpha_s^0 \sin \alpha_t^0 - f_s \sin \alpha_s^0 \cos \alpha_t^0) \sin (\beta_s - \beta_t + \alpha_s^3 - \alpha_t^3) \right]. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Zusammengefasst hat man nun für die quadrierte Amplitude der Bhabha-Streuung in niedrigster Ordnung Störungsrechnung in IPTO NCQED

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}|^2 \\
&= 2e^4 \left[\frac{t^2 + u^2}{s^2} (\cos^2 \alpha_s^0 + f_s^2 \sin^2 \alpha_s^0) + \frac{s^2 + u^2}{t^2} (\cos^2 \alpha_t^0 + f_t^2 \sin^2 \alpha_t^0) \right. \\
&\quad + 2 \frac{u^2}{s \cdot t} \left\{ (\cos \alpha_s^0 \cos \alpha_t^0 + f_s f_t \sin \alpha_s^0 \sin \alpha_t^0) \cos (\beta_s - \beta_t + \alpha_{q_s}^3 - \alpha_{q_t}^3) \right. \\
&\quad \left. \left. + (f_t \cos \alpha_s^0 \sin \alpha_t^0 - f_s \sin \alpha_s^0 \cos \alpha_t^0) \sin (\beta_s - \beta_t + \alpha_{q_s}^3 - \alpha_{q_t}^3) \right\} \right]. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Wenn man bedenkt, dass die Phasen $\alpha \propto \theta^{\mu\nu} \propto \Lambda_{\text{NC}}^{-2}$ sind, sieht man, wenn man den Cosinus und Sinus entwickelt, dass in niedrigster nichtverschwindender Ordnung in $\theta^{\mu\nu}$ alle Terme des Wirkungsquerschnitts proportional zu α^2 und demnach proportional zu Λ_{NC}^{-4} sind. Man sieht also, dass die Schwerpunktsenergie des Beschleunigers in der Größenordnung von Λ_{NC} liegen muss, damit man nicht-kommutative Effekte bei der Bhabha-Streuung zu sehen bekommt.

4.1.3 Übergang in das Schwerpunkt-System

In diesem Abschnitt wollen wir in das Schwerpunktsystem Σ (Center of Mass System, CMS) gehen, um die konkrete Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von den Elementen des $c^{\mu\nu}$ -Tensors (1.3) zu sehen. Die vier Impulse des Streuprozesses setzen wir im Schwerpunktsystem folgendermaßen fest

$$\begin{aligned}
p_1^\mu &= \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 1, 0, 0)^\mu & p_2^\mu &= \frac{\sqrt{s}}{2} (1, -1, 0, 0)^\mu \\
k_1^\mu &= \frac{\sqrt{s}}{2} (1, \cos \vartheta, \sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi)^\mu \\
k_2^\mu &= \frac{\sqrt{s}}{2} (1, -\cos \vartheta, -\sin \vartheta \cos \phi, -\sin \vartheta \sin \phi)^\mu,
\end{aligned}$$

wobei ϑ der Polarwinkel und ϕ der Azimutalwinkel ist. Es sei angemerkt, dass sich die Teilchen im Anfangszustand nicht parallel zur x^3 - sondern zur x^1 -Richtung bewegen. Mit der folgenden konkreten Darstellung des $c^{\mu\nu}$ -Tensors

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{1}{\Lambda_{\text{NC}}^2} c_{\mu\nu} = \frac{1}{\Lambda_{\text{NC}}^2} \begin{pmatrix} 0 & c_{01} & c_{02} & c_{03} \\ -c_{01} & 0 & c_{12} & c_{13} \\ -c_{02} & -c_{12} & 0 & c_{23} \\ -c_{03} & -c_{13} & -c_{23} & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu}, \quad (4.14)$$

kann man alle möglichen Kombinationen der Impulse mit dem Tensor $\theta_{\mu\nu}$ - auch wenn hier nicht alle Kombinationen benötigt werden, sind der Vollständigkeit halber doch alle angegeben - berechnen

$$\begin{aligned}
p_1 \cdot c \cdot p_2 &= -\frac{s}{2} c_{01} \\
k_1 \cdot c \cdot k_2 &= -\frac{s}{2} [c_{01} \cos \vartheta + c_{02} \sin \vartheta \cos \phi + c_{03} \sin \vartheta \sin \phi] \\
p_1 \cdot c \cdot k_1 &= -\frac{s}{4} [c_{01}(1 - \cos \vartheta) - (c_{02} + c_{12}) \sin \vartheta \cos \phi - (c_{03} + c_{13}) \sin \vartheta \sin \phi]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_1 \cdot c \cdot k_2 &= -\frac{s}{4} [c_{01}(1 + \cos \vartheta) + (c_{02} + c_{12}) \sin \vartheta \cos \phi + (c_{03} + c_{13}) \sin \vartheta \sin \phi] \\
p_2 \cdot c \cdot k_1 &= -\frac{s}{4} [-c_{01}(1 + \cos \vartheta) \\
&\quad - (-c_{02} + c_{12}) \sin \vartheta \cos \phi - (-c_{03} + c_{13}) \sin \vartheta \sin \phi] \\
p_2 \cdot c \cdot k_2 &= -\frac{s}{4} [-c_{01}(1 - \cos \vartheta) \\
&\quad + (c_{02} - c_{02}) \sin \vartheta \cos \phi + (c_{03} - c_{13}) \sin \vartheta \sin \phi] ,
\end{aligned}$$

wobei $p \cdot c \cdot q = c^{\mu\nu} p_\mu q_\nu$ ist. Für die Bhabha-Streuung sind natürlich die in (4.6) genannten Größen relevant. Diese sind im Schwerpunktsystem

$$\begin{aligned}
q_s^\mu &= (\sqrt{s}, 0, 0, 0)^\mu & q_t^\mu &= \frac{\sqrt{s}}{2} (0, 1 - \cos \vartheta, \sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi)^\mu \\
\alpha_s^0 &= 0 & \alpha_t^0 &= 0 \\
\alpha_s^3 &= 0 & \alpha_t^3 &= \frac{s}{2\Lambda_{\text{NC}}^2} [-c_{01}(1 - \cos \vartheta) + c_{02} \sin \vartheta \cos \phi + c_{03} \sin \vartheta \sin \phi] \\
\beta_s &= \frac{s}{4\Lambda_{\text{NC}}^2} [-c_{01}(1 - \cos \vartheta) + c_{02} \sin \vartheta \cos \phi + c_{03} \sin \vartheta \sin \phi] \\
\beta_t &= -\frac{s}{4\Lambda_{\text{NC}}^2} [-c_{01}(1 - \cos \vartheta) + c_{02} \sin \vartheta \cos \phi + c_{03} \sin \vartheta \sin \phi] = -\beta_s \\
f_t &= 0 .
\end{aligned}$$

Den Faktor f_s muss man gesondert behandeln, da in Σ die ausgetauschte Energie des s -Kanals gegen Null geht, also $E_{\vec{q}_s} \rightarrow 0$ und somit formal f_s divergent ist. Das Produkt $f_s \cdot \sin \alpha_s^0$ bleibt jedoch konvergent, was man leicht sehen kann, da

$$\begin{aligned}
&f_s \cdot \sin \alpha_s^0 \\
&= \frac{q_s^0}{E_{\vec{q}_s}} \cdot \sin \left(\frac{1}{2} E_{\vec{q}_s} \theta_{0i} (p_1 - k_1 + k_2 - p_2)^i \right) \xrightarrow{\text{CMS}} q_s^0 \cdot \frac{1}{2} \theta_{0i} (p_1 - k_1 + k_2 - p_2)^i \\
&= -\frac{s}{2\Lambda_{\text{NC}}^2} [-c_{01}(1 - \cos \vartheta) + c_{02} \sin \vartheta \cos \phi + c_{03} \sin \vartheta \sin \phi] = -\alpha_t^3 \quad (4.15)
\end{aligned}$$

ist. Wenn man nun diese Ergebnisse in (4.5) einsetzt, erhält man folgendes Resultat für die quadrierte Amplitude

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}_{\text{CMS}}|^2 = 2e^4 \left[\frac{t^2 + u^2}{s^2} (1 + \Delta_{\text{Bh}}^2) + \frac{s^2 + u^2}{t^2} + 2 \frac{u^2}{s \cdot t} \right] \quad (4.16)$$

mit der nicht-kommutativen Phase im Schwerpunktsystem

$$\begin{aligned}
\Delta_{\text{Bh}} &= -\frac{s}{2\Lambda_{\text{NC}}^2} [c_{01}(\cos \vartheta - 1) + c_{02} \sin \vartheta \cos \phi + c_{03} \sin \vartheta \sin \phi] \\
&= -\frac{1}{\Lambda_{\text{NC}}^2} \left(c_{01}t + \sqrt{ut} [c_{02} \cos \phi + c_{03} \sin \phi] \right) . \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Hier wurden die Mandelstam-Variablen verwendet, die in Σ

$$s = E_{\text{CMS}}^2 \quad t = -\frac{s}{2}(\cos \vartheta - 1) \quad u = -\frac{s}{2}(\cos \vartheta + 1)$$

ergeben. Mit den obigen Rechnungen ist der differentiellen Wirkungsquerschnitt der Bhabha-Streuung für den masselosen Limes

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CMS}} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{t^2 + u^2}{s^2} (1 + \Delta_{\text{Bh}}^2) + \frac{s^2 + u^2}{t^2} + 2 \frac{u^2}{s \cdot t} \right]. \quad (4.18)$$

Man sieht, wie oben schon erwähnt, dass die neue nicht-kommutative Physik mit Λ_{NC}^{-4} in den Wirkungsquerschnitt eingeht, weswegen mit der Bhabha-Streuung nur schwer, das heißt nur mit sehr hoher Schwerpunktsenergie, nicht-kommutative Effekte entdeckt werden können. Wie man an (4.17) sieht, ist die Bhabha-Streuung nur auf die Zeitkomponenten, also auf c_{0i} , sensitiv. Das heißt natürlich, dass es grundsätzlich nicht möglich ist, die Raumkomponenten von $c^{\mu\nu}$ mit dieser Observable zu messen. Wie wir in den nächsten beiden Abschnitten sehen werden, ändert sich dies bei der Møller- und Compton-Streuung. Zu dem Wirkungsquerschnitt (4.18) sei noch erwähnt, dass für $s \rightarrow \infty$ die Größe

$$\Delta_{\text{Bh}} \propto \frac{s}{\Lambda_{\text{NC}}^2} \quad \text{und somit auch} \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CMS}} \quad (4.19)$$

formal nicht beschränkt ist. Dies muss aber nicht zwangsläufig die Froissart-Martin Grenze verletzen, wie in [16] erwähnt wird.

4.2 Møller-Streuung

In diesem Abschnitt wollen wir, wie bei der Bhabha-Streuung, den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Møller-Streuung berechnen. Da die Berechnung bezüglich der Bhabha-Streuung keine neuen Elemente beinhaltet - außer den neu hinzugekommenen u -Kanal, der aber nicht anders zu berechnen ist als der t -Kanal - werden wir in diesem Abschnitt nur die wichtigen Ergebnisse präsentieren. Ausgangspunkt sind die in Abbildung 4.2 gezeigten Feynman-Graphen der Møller-Streuung. Nach der Anleitung aus Abschnitt 3.2 ergeben die Feynman-Graphen aus Abbildung 4.2 die folgende Amplitude

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{\text{Mø}}^{(2)} = & \sum_{\lambda=-}^+ \bar{u}(k_1) \left(-i e \gamma^\mu e^{\frac{i}{2}[-p_1\theta k_1 + \lambda_{qt}\theta(p_1+k_1)]} \right) u(p_1) \\ & \frac{1}{2E_{\vec{q}_t}} \frac{-i g_{\mu\nu}}{\lambda q_t^0 - E_{\vec{q}_t} + i\epsilon} \bar{u}(k_2) \left(-i e \gamma^\nu e^{\frac{i}{2}[-p_2\theta k_2 - \lambda_{qt}\theta(p_2+k_2)]} \right) u(p_2) \\ & - \sum_{\lambda=-}^+ \bar{u}(k_2) \left(-i e \gamma^\mu e^{\frac{i}{2}[-p_1\theta k_2 + \lambda_{qu}\theta(p_1+k_2)]} \right) u(p_1) \\ & \frac{1}{2E_{\vec{q}_u}} \frac{-i g_{\mu\nu}}{\lambda q_u^0 - E_{\vec{q}_u} + i\epsilon} \bar{u}(k_1) \left(-i e \gamma^\nu e^{\frac{i}{2}[-p_2\theta k_1 - \lambda_{qu}\theta(p_2+k_1)]} \right) u(p_2), \quad (4.20) \end{aligned}$$

mit den Impulsen

$$\begin{aligned} q_t = p_1 - k_1 = k_2 - p_2 \quad \lambda_{qt} &= (\lambda E_{\vec{p}_1 - \vec{k}_1}, \vec{p}_1 - \vec{k}_1) = (\lambda E_{\vec{k}_2 - \vec{p}_2}, \vec{k}_2 - \vec{p}_2) \\ q_u = p_1 - k_2 = k_1 - p_2 \quad \lambda_{qu} &= (\lambda E_{\vec{p}_1 - \vec{k}_2}, \vec{p}_1 - \vec{k}_2) = (\lambda E_{\vec{k}_1 + \vec{p}_2}, \vec{k}_1 + \vec{p}_2). \end{aligned}$$

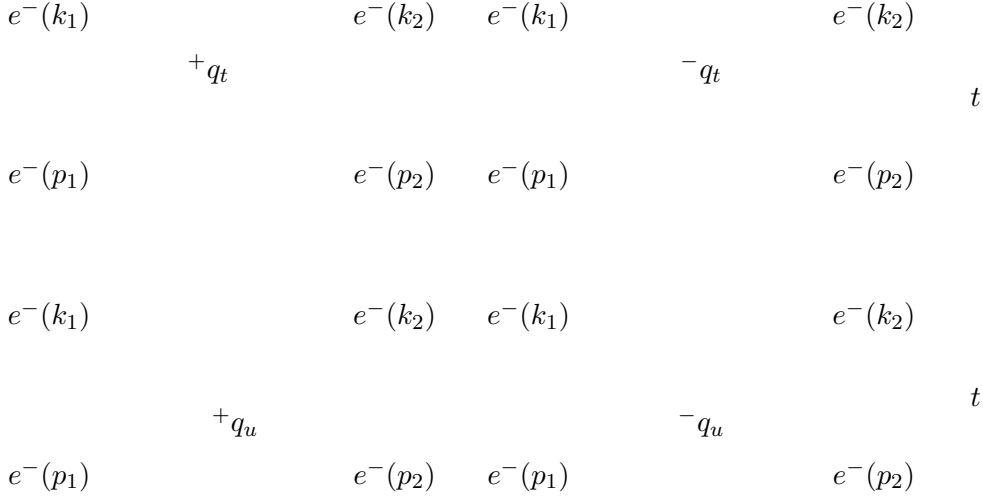


Abbildung 4.2: Feynmangraphen der Møller-Streuung

Wie bei der Bhabha-Streuung trennt man im ersten Schritt die Größen, die von λ abhängen von dem Rest der Amplitude und führt dann die Summe über λ aus, was folgende Streuamplitude ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{Mø}}^{(2)} = & e^2 \bar{u}(k_1) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(k_1) \gamma_\mu u(p_2) e^{i\beta_t} e^{i\alpha_t^3} \frac{1}{q_t^2 + i\epsilon} [\cos \alpha_t^0 + i f_t \sin \alpha_t^0] \\ & - e^2 \bar{u}(k_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(k_1) \gamma_\mu u(p_2) e^{i\beta_u} e^{i\alpha_u^3} \frac{1}{q_u^2 + i\epsilon} [\cos \alpha_u^0 + i f_u \sin \alpha_u^0] , \quad (4.21) \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \alpha_t^0 &= \frac{1}{2} E_{\vec{q}_t} \theta_{0i}(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)^i & \alpha_u^0 &= \frac{1}{2} E_{\vec{q}_u} \theta_{0i}(p_1 + k_2 - p_2 - k_1)^i \\ \alpha_t^3 &= \frac{1}{2} q_t^i \theta_{i\mu}(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)^\mu & \alpha_u^3 &= \frac{1}{2} q_u^i \theta_{i\mu}(p_1 + k_2 - p_2 - k_1)^\mu \\ \beta_t &= -\frac{1}{2} [p_1 \theta k_1 + p_2 \theta k_2] & \beta_u &= -\frac{1}{2} [p_1 \theta k_2 + p_2 \theta k_1] = -\beta_t \\ f_t &= \frac{q_t^0}{E_{\vec{q}_t}} & f_u &= \frac{q_u^0}{E_{\vec{q}_u}} , \end{aligned}$$

wobei sich auch bei der Møller-Streuung die Residuen der Propagatoren vom t - und u -Kanal ändern. Als Nächstes quadrieren wir die Amplitude und erhalten für den t - und u -Kanal und den Interferenztermen folgendes Ergebnis

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}|^2 = & 2e^4 \left[\frac{s^2 + u^2}{t^2} (\cos^2 \alpha_t^0 + f_t^2 \sin^2 \alpha_t^0) + \frac{s^2 + t^2}{u^2} (\cos^2 \alpha_u^0 + f_u^2 \sin^2 \alpha_u^0) \right. \\ & + 2 \frac{s^2}{t \cdot u} \left\{ (\cos \alpha_t^0 \cos \alpha_u^0 + f_t f_u \sin \alpha_t^0 \sin \alpha_u^0) \cos(\beta_t - \beta_u + \alpha_t^3 - \alpha_u^3) \right. \\ & \left. \left. + (f_u \cos \alpha_t^0 \sin \alpha_u^0 - f_t \sin \alpha_t^0 \cos \alpha_u^0) \sin(\beta_t - \beta_u + \alpha_t^3 - \alpha_u^3) \right\} \right] . \quad (4.22) \end{aligned}$$

Beim Übergang in das Schwerpunktsystem, wobei die externen Impulse wie bei der Bhabha-Streuung gewählt sind, gibt es keine scheinbaren divergenten Größen, wie bei der Bhabha-Streuung, weswegen man explizit alle Größen der Møller-Streuung ohne Schwierigkeit in Σ umschreiben kann

$$\begin{aligned}
q_t^\mu &= \frac{\sqrt{s}}{2} (0, 1 - \cos \vartheta, -\sin \vartheta \cos \phi, -\sin \vartheta \sin \phi)^\mu \\
q_u^\mu &= \frac{\sqrt{s}}{2} (0, 1 + \cos \vartheta, \sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi)^\mu \\
\alpha_t^0 &= \frac{\sqrt{s} \sqrt{s \sin^2 \theta / 2}}{2\Lambda_{\text{NC}}^2} [c_{01}(1 + \cos \vartheta) + \sin \vartheta (c_{02} \cos \phi + c_{03} \sin \phi)] \\
\alpha_t^3 &= \frac{s \sin \vartheta}{2\Lambda_{\text{NC}}^2} (c_{12} \cos \phi + c_{13} \sin \phi) \\
\alpha_u^0 &= -\frac{\sqrt{s} \sqrt{s \cos^2 \theta / 2}}{2\Lambda_{\text{NC}}^2} [-c_{01}(1 - \cos \vartheta) + \sin \vartheta (c_{02} \cos \phi + c_{03} \sin \phi)] \\
\alpha_u^3 &= -\frac{s \sin \vartheta}{2\Lambda_{\text{NC}}^2} (c_{12} \cos \phi + c_{13} \sin \phi) \\
\beta_t &= -\frac{s}{2\Lambda_{\text{NC}}^2} \sin \vartheta (c_{12} \cos \phi + c_{13} \sin \phi) \\
\beta_u &= \frac{s}{2\Lambda_{\text{NC}}^2} \sin \vartheta (c_{12} \cos \phi + c_{13} \sin \phi) \\
f_t &= 0 \\
f_u &= 0.
\end{aligned}$$

Mit den folgenden Größen

$$\begin{aligned}
\alpha_t^0 &= -\frac{1}{\Lambda_{\text{NC}}^2} \sqrt{-\frac{t}{s}} \left[c_{01}u - \sqrt{tu}(c_{02} \cos \phi + c_{03} \sin \phi) \right] \\
\alpha_u^0 &= -\frac{1}{\Lambda_{\text{NC}}^2} \sqrt{-\frac{u}{s}} \left[c_{01}t + \sqrt{tu}(c_{02} \cos \phi + c_{03} \sin \phi) \right] \\
\Delta_{\text{M}\emptyset} &= \beta_t - \beta_u + \alpha_t^3 - \alpha_u^3 = \frac{\sqrt{tu}}{\Lambda_{\text{NC}}^2} (c_{12} \cos \phi + c_{13} \sin \phi)
\end{aligned}$$

bekommt man einen kompakten Ausdruck für die quadrierte Amplitude der Møller-Streuung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}|^2 &= 2e^4 \left[\frac{s^2 + u^2}{t^2} \cos^2 \alpha_t^0 + \frac{s^2 + t^2}{u^2} \cos^2 \alpha_u^0 \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{s^2}{t \cdot u} \cdot \cos \alpha_t^0 \cos \alpha_u^0 \cos \Delta_{\text{M}\emptyset} \right], \quad (4.23)
\end{aligned}$$

was sofort zum differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CMS}} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{s^2 + u^2}{t^2} \cos^2 \alpha_t^0 + \frac{s^2 + t^2}{u^2} \cos^2 \alpha_u^0 \right.$$

$$+ 2 \frac{s^2}{t \cdot u} \cdot \cos \alpha_t^0 \cos \alpha_u^0 \cos \Delta_{M\emptyset} \Big] \quad (4.24)$$

führt. Wie man auch hier sieht, ist die niedrigste nicht verschwindende Ordnung in $\theta_{\mu\nu}$ proportional zu α^2 oder $\Delta_{M\emptyset}^2$, was auch hier bedeutet, dass die niedrigste Ordnung proportional zu Λ_{NC}^{-4} ist. Das heißt, dass auch der Wirkungsquerschnitt der Møller-Streuung, wie der der Bhabha-Streuung, keine gute Observable ist, um neue nicht-kommutative Physik zu detektieren. Anders als bei der Bhabha-Streuung, ist dieser Wirkungsquerschnitt aber sensitiv auf die Raumkomponenten c_{12} und c_{13} des $c^{\mu\nu}$ -Tensors, was bedeutet, dass anhand der Møller-Streuung zwei weitere Komponenten von $\theta_{\mu\nu}$ theoretisch messbar sind.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels, wird der differentielle Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung berechnet. Dieses Unterfangen wird, wie wir sehen werden, recht aufwendig.

4.3 Compton-Streuung

Als letzter Prozess wird der Wirkungsquerschnitt für die Compton-Streuung berechnet. Dieser Prozess ist in zweierlei Hinsicht interessant. Als erstes enthält dieser Streuprozess den in der NCQED neu hinzugekommenen drei-Photon-Vertex. Zum anderen liegen bei der Compton-Streuung zwei externe Eichbosonen, also Photonen, vor, weshalb man anhand dieses Prozesses in der Lage ist, die Ward-Identität zu überprüfen. Wegen dem drei-Photon-Vertex werden, wie schon öfters erwähnt, unphysikalische Polarisationszustände erzeugt, die durch das Einfügen von Geist-Termen wieder entfernt werden. In Baumgraphennäherung gibt es zwar die Möglichkeit, die Summe über die Polarisationszustände explizit durch rein physikalische Zustände zu ersetzen (siehe weiter unten), sobald man aber Schleifenrechnungen, wie zum Beispiel der Photonselbstenergie, ausführen will, benötigt man zwingend die durch den Eichfixierungsterm hinzugefügten Geist-Felder. Wie wir weiter unten sehen werden, erhält man aber einen *negativen* Wirkungsquerschnitt für die Compton-Streuung, wenn man die unphysikalischen Polarisationszustände durch die Geist-Felder entfernen will. Dieses Problem wird auch nicht von der Tatsache relativiert, dass der Wirkungsquerschnitt positiv definit bleibt, wenn man die Summe über die Polarisationszustände durch rein physikalische Zustände ersetzt, da diese Ersetzung, wie oben schon erwähnt, eben nur in Baumgraphennäherung möglich ist. Der Grund, warum der Wirkungsquerschnitt bei der Verwendung der Geist-Felder negativ wird, liegt, wie schon öfters angesprochen wurde, in der Verletzung der Ward-Identität, die wir im nächsten Kapitel ausführlich besprechen werden.

Nachdem wir jetzt die kommenden Probleme schon kennen, wollen wir zurückkehren und uns der Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts widmen. Die Nicht-Kommutativität führt dazu, dass die Compton-Streuung nun

nicht mehr nur einen s - und u -Kanal, sondern auch einen t -Kanal Beitrag aufweist. Dieser zusätzliche Kanal lässt auch die Berechnung ziemlich aufwendig werden. Außerdem kommt dann noch die Geist-Amplitude hinzu, die ebenfalls quadriert werden muss. Alles in allem haben wir also acht Feynmangraphen, jeweils zwei - wegen der IPTO - für s -, t - und u -Kanal plus zwei für die Geist-Amplitude, die in Abbildung 4.3 dargestellt sind.

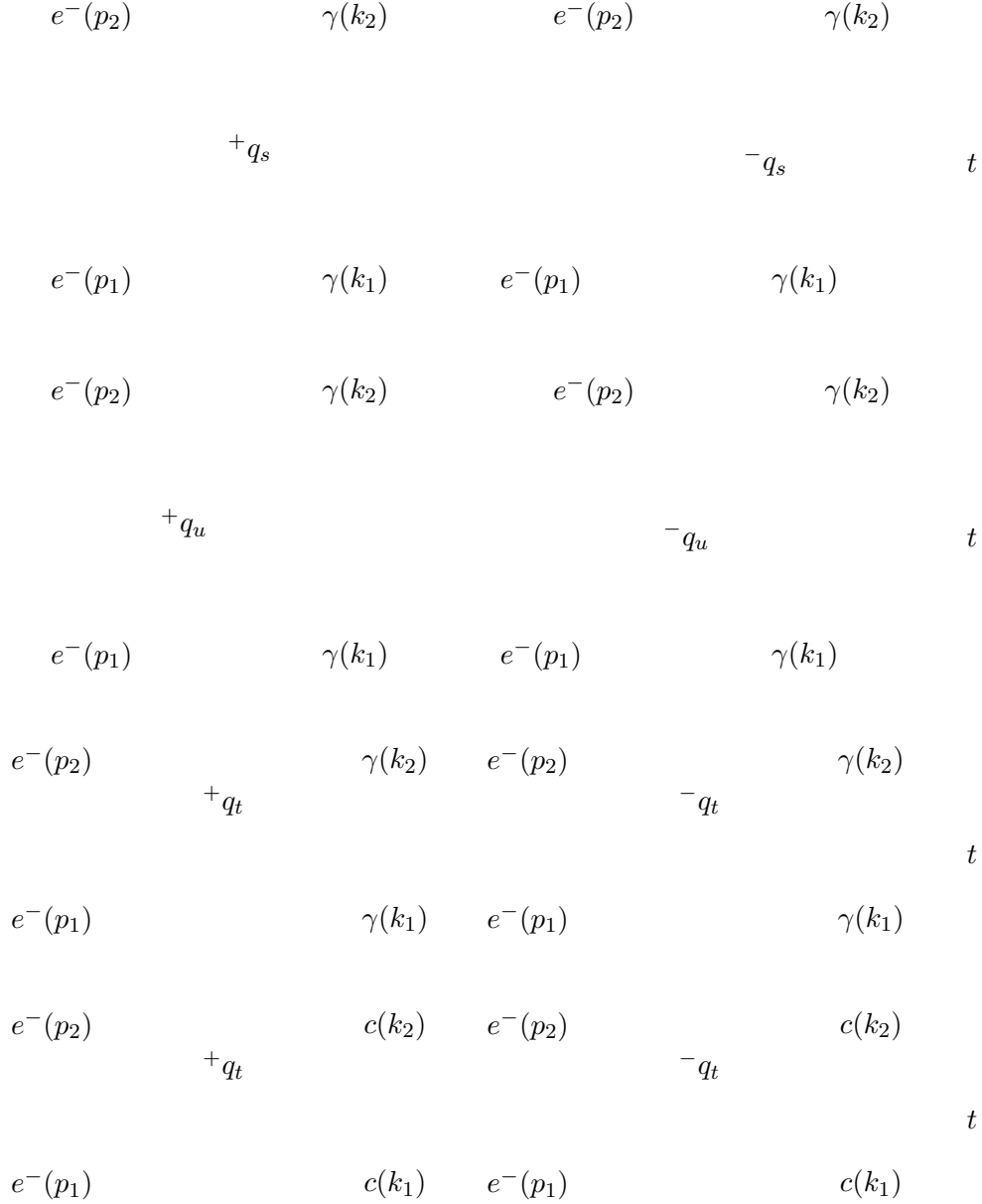


Abbildung 4.3: Feynmangraphen der Compton-Streuung

Es sei angemerkt, dass in diesem Abschnitt die Ableitungskopplungen des drei-Photon-Vertex nicht mit dem Zeitordnungsoperator vertauscht werden (siehe auch 3.3). Diese Berechnung ist weniger aufwendig, als die, bei der die Ableitungskopplungen vertauscht werden. Außerdem gibt es auch ein

physikalisches Argument die Vertauschung nicht vorzunehmen, das in Kapitel 5 deutlich werden wird.

Zuerst behandeln wir die Amplitude mit den externen Photonen, die man aus (3.34) erhält, oder die sich aus den obigen ersten sechs Feynman-Graphen ergibt

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_{\text{Co}}^{(2)}(e^-\gamma \rightarrow e^-\gamma) &= \sum_{\lambda=-}^+ \bar{u}(p_2) \left(-i e \gamma^\mu e^{\frac{i}{2}[-\lambda q_s \theta p_2 + k_2 \theta(p_2 + \lambda q_s)]} \right) \epsilon_\mu^*(k_2) \\
&\quad \frac{1}{2E_{\vec{q}_s}} \frac{i(\not{q}_s + m)}{\lambda q_s^0 - E_{\vec{q}_s} + i\epsilon} \epsilon_\nu(k_1) \left(-i e \gamma^\nu e^{\frac{i}{2}[-p_1 \theta \lambda q_s - k_1 \theta(\lambda q_s + p_1)]} \right) u(p_1) \\
&\quad + \sum_{\lambda=-}^+ \bar{u}(p_2) \left(-i e \gamma^\mu e^{\frac{i}{2}[-\lambda q_u \theta p_2 - k_1 \theta(p_2 + \lambda q_u)]} \right) \epsilon_\mu(k_1) \\
&\quad \frac{1}{2E_{\vec{q}_u}} \frac{i(\not{q}_u + m)}{\lambda q_u^0 - E_{\vec{q}_u} + i\epsilon} \epsilon_\nu^*(k_2) \left(-i e \gamma^\nu e^{\frac{i}{2}[-p_1 \theta \lambda q_s + k_2 \theta(\lambda q_s + p_1)]} \right) u(p_1) \\
&\quad + \sum_{\lambda=-}^+ \bar{u}(p_2) \left(-i e \gamma^\mu e^{\frac{i}{2}[-p_1 \theta p_2 + \lambda q_t \theta(p_1 + p_2)]} \right) u(p_1) \\
&\quad \frac{1}{2E_{\vec{q}_t}} \frac{-i g_{\mu\nu}}{\lambda q_t^0 - E_{\vec{q}_t} + i\epsilon} \\
&\quad \epsilon_\rho(k_1) (-2e [g^{\nu\rho}(P - Q)^\sigma + g^{\rho\sigma}(Q - R)^\nu + g^{\sigma\nu}(R - P)^\rho]) \epsilon_\sigma^*(k_2), \quad (4.25)
\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
Q^\mu &= -k_1^\mu \cdot e^{-\frac{i}{2}k_1\theta(\lambda q_t - k_2)} \sin\left(\frac{k_2\theta\lambda q_t}{2}\right) \\
R^\mu &= -k_2^\mu \cdot e^{\frac{i}{2}k_2\theta(k_1 + \lambda q_t)} \sin\left(\frac{\lambda q_t\theta k_1}{2}\right) \\
P^\mu &= -q_t^\mu \cdot e^{-\frac{i}{2}\lambda q_t\theta(k_1 - k_2)} \sin\left(\frac{k_1\theta k_2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Die Größen Q , R und P tragen ein negatives Vorzeichen, da der Impuls k_2 auslaufend ist. Wie bei der Bhabha- und Möller-Streuung trennen wir die Größen, die von λ abhängen und führen die Summation über λ aus. Man erhält dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{Co}}^{(2)}(e^-\gamma \rightarrow e^-\gamma) &= -e^2 \bar{u}(p_2) \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(k_2) (\not{q}_s + m) \gamma^\nu \epsilon_\nu(k_1) u(p_1) e^{i\beta_s} e^{i\alpha_s^3} \\
&\quad \left[\frac{1}{q_s^2 - m^2 + i\epsilon} (\cos \alpha_s^0 + i f_s \sin \alpha_s^0) + i \frac{\gamma^0}{E_{\vec{q}_s}} \sin \alpha_s^0 \right] \\
&\quad - e^2 \bar{u}(p_2) \gamma^\mu \epsilon_\mu(k_1) (\not{q}_u + m) \gamma^\nu \epsilon_\nu^*(k_2) u(p_1) e^{i\beta_u} e^{i\alpha_u^3} \\
&\quad \left[\frac{1}{q_u^2 - m^2 + i\epsilon} (\cos \alpha_u^0 + i f_u \sin \alpha_u^0) + i \frac{\gamma^0}{E_{\vec{q}_u}} \sin \alpha_u^0 \right] \\
&\quad - 2i e^2 \bar{u}(p_2) \gamma_\nu u(p_1) \epsilon_\rho(k_1) \epsilon_\sigma^*(k_2) e^{i\beta_t} \frac{1}{q_t^2 + i\epsilon} \\
&\quad \left[(g^{\sigma\nu} q_t^\rho - g^{\nu\rho} q_t^\sigma) \sin\left(\frac{k_1\theta k_2}{2}\right) e^{i\alpha_{t1}^3} (\cos \alpha_{t1}^0 + i f_t \sin \alpha_{t1}^0) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (g^{\rho\sigma} k_1^\nu - g^{\nu\rho} k_1^\sigma) e^{\frac{i}{2} k_1 \theta k_2} e^{i\alpha_{t2}^3} \{ (f_t \cos \alpha_{t2}^0 + i \sin \alpha_{t2}^0) \sin \alpha_{ta}^0 \cos \alpha_{ta}^3 \\
& \quad + (\cos \alpha_{t2}^0 + i f_t \sin \alpha_{t2}^0) \sin \alpha_{ta}^3 \cos \alpha_{ta}^0 \} \\
& + (g^{\rho\sigma} k_2^\nu - g^{\sigma\nu} k_2^\rho) e^{-\frac{i}{2} k_1 \theta k_2} e^{i\alpha_{t3}^3} \{ (f_t \cos \alpha_{t3}^0 + i \sin \alpha_{t3}^0) \sin \alpha_{tb}^0 \cos \alpha_{tb}^3 \\
& \quad + (\cos \alpha_{t3}^0 + i f_t \sin \alpha_{t3}^0) \sin \alpha_{tb}^3 \cos \alpha_{tb}^0 \} \Big], \quad (4.26)
\end{aligned}$$

mit folgenden Größen

$$\begin{aligned}
q_s &= p_1 + k_1 = p_2 + k_2 & q_u &= p_1 - k_2 = p_2 - k_1 & q_t &= p_1 - p_2 = k_2 - k_1 \\
\alpha_s &= \frac{1}{2} q_s \theta (p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \equiv 0 & \alpha_u &= \frac{1}{2} q_u \theta (p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \equiv 0 \\
\alpha_{t1} &= \frac{1}{2} q_t \theta (p_1 - k_1 + p_2 + k_2) & \alpha_{t2} &= \frac{1}{2} q_t \theta (p_1 + p_2 + k_1) \\
\alpha_{t3} &= \frac{1}{2} q_t \theta (p_1 + p_2 - k_2) & \alpha_{ta} &= \frac{1}{2} q_t \theta k_2 & \alpha_{tb} &= \frac{1}{2} q_t \theta k_1 \\
\beta_s &= \frac{1}{2} (p_1 \theta p_2 - k_1 \theta k_2) & \beta_u &= \frac{1}{2} (p_1 \theta p_2 + k_1 \theta k_2) & \beta_t &= -\frac{1}{2} p_1 \theta p_2 \\
f_i &= \frac{q_i^0}{E_{\vec{q}_i}} \quad \text{mit } i = s, t, u,
\end{aligned}$$

wobei, wie bei Bhabha- und Møller-Streuung,

$$\alpha_j^0 = \frac{1}{2} E_{\vec{q}_j} \theta_{0i} (\dots)^i \quad \alpha_j^3 = \frac{1}{2} q_j^i \theta_{i\mu} (\dots)^\mu$$

ist. Wie man an (4.26) sieht, wird das Residuum des t -Kanals ziemlich kompliziert. Der Grund ist folgender: durch die Wechselwirkungspunkt-Zeitordnung, bei der alle internen Impulse p durch λp ersetzt werden, wird die Symmetrie des drei-Photon-Vertex explizit gebrochen. Dies führt dann dazu, dass die nicht-kommutativen Phasen der drei Photonen nicht mehr gleich sind, was wiederum ursächlich für die recht komplexe Struktur der Amplitude (4.26) ist.

Wegen der Impulserhaltung vereinfachen sich aber die s - und u -Kanal Amplitude, da aus $p_1 + k_1 - p_2 - k_2 = 0$ sofort folgt, dass $\alpha_s \equiv 0$ und $\alpha_u \equiv 0$ ist, womit man dann bei folgender Amplitude angelangt ist

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}_{\text{Co}}^{(2)}(e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma) \\
& = -e^2 \bar{u}(p_2) \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(k_2) (\not{q}_s + m) \gamma^\nu \epsilon_\nu(k_1) u(p_1) e^{i\beta_s} \frac{1}{q_s^2 - m^2 + i\epsilon} \\
& \quad - e^2 \bar{u}(p_2) \gamma^\mu \epsilon_\mu(k_1) (\not{q}_u + m) \gamma^\nu \epsilon_\nu^*(k_2) u(p_1) e^{i\beta_u} \frac{1}{q_u^2 - m^2 + i\epsilon} \\
& \quad - 2i e^2 \bar{u}(p_2) \gamma_\nu u(p_1) \epsilon_\rho(k_1) \epsilon_\sigma^*(k_2) e^{i\beta_t} \frac{1}{q_t^2 + i\epsilon} \\
& \quad \left[(g^{\sigma\nu} q_t^\rho - g^{\nu\rho} q_t^\sigma) \sin\left(\frac{k_1 \theta k_2}{2}\right) e^{i\alpha_{t1}^3} (\cos \alpha_{t1}^0 + i f_t \sin \alpha_{t1}^0) \right. \\
& \quad + (g^{\rho\sigma} k_1^\nu - g^{\nu\rho} k_1^\sigma) e^{\frac{i}{2} k_1 \theta k_2} e^{i\alpha_{t2}^3} \{ (f_t \cos \alpha_{t2}^0 + i \sin \alpha_{t2}^0) \sin \alpha_{ta}^0 \cos \alpha_{ta}^3 \\
& \quad \quad \left. + (\cos \alpha_{t2}^0 + i f_t \sin \alpha_{t2}^0) \sin \alpha_{ta}^3 \cos \alpha_{ta}^0 \} \right]
\end{aligned}$$

$$+ (g^{\rho\sigma} k_2^\nu - g^{\sigma\nu} k_2^\rho) e^{-\frac{i}{2} k_1 \theta k_2} e^{i\alpha_{t3}^3} \left\{ (f_t \cos \alpha_{t3}^0 + i \sin \alpha_{t3}^0) \sin \alpha_{tb}^0 \cos \alpha_{tb}^3 \right. \\ \left. + (\cos \alpha_{t3}^0 + i f_t \sin \alpha_{t3}^0) \sin \alpha_{tb}^3 \cos \alpha_{tb}^0 \right\} \Big]. \quad (4.27)$$

Nun wollen wir die Geist-Amplitude betrachten, die man, wie die Photon-Amplitude, entweder aus (3.34), oder aus den Feynmangraphen in Abbildung (4.3) erhält

$$i \mathcal{M}_{Co}^{(2)}(e^- c \rightarrow e^- c) = \sum_{\lambda=-}^+ \bar{u}(p_2) \left(-i e \gamma^\mu e^{\frac{i}{2} [-p_1 \theta p_2 + \lambda q_t \theta (p_1 + p_2)]} \right) u(p_1) \\ \frac{1}{2E_{\vec{q}_t}} \frac{-i g_{\mu\nu}}{\lambda q_t^0 - E_{\vec{q}_t} + i\epsilon} 1 \cdot \left(-2i e (k_1 + q_t)^\nu e^{-\frac{i}{2} \lambda q_t \theta (k_1 - k_2)} \sin\left(\frac{k_1 \theta k_2}{2}\right) \right) \cdot 1. \quad (4.28)$$

Nach der Summation über λ erhält man für die obige Amplitude

$$\mathcal{M}_{Co}^{(2)}(e^- c \rightarrow e^- c) = 2e^2 \bar{u}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) e^{i\beta_g} e^{i\alpha_g^3} \sin\left(\frac{k_1 \theta k_2}{2}\right) \\ \frac{1}{q_t^2 + i\epsilon} k_{2\mu} (\cos \alpha_g^0 + i f_t \sin \alpha_g^0) \quad (4.29)$$

mit den folgenden Abkürzungen

$$\alpha_g = \alpha_{t3} = \frac{1}{2} q_t \theta (p_1 + p_2 - k_2) \quad \beta_g = -\frac{1}{2} (p_1 \theta p_2 + k_1 \theta k_2) \quad f_t = \frac{q_t^0}{E_{\vec{q}_t}}.$$

Nun quadrieren wir die Amplituden (4.27) und (4.29). Um die Schreibweise so kompakt wie möglich zu halten, führen wir folgende Abkürzungen für die Amplituden ein

$$S = -e^2 \bar{u}(p_2) \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(k_2) (\not{q}_s + m) \gamma^\nu \epsilon_\nu(k_1) u(p_1) e^{i\beta_s} \frac{1}{q_s^2 - m^2 + i\epsilon} \\ U = -e^2 \bar{u}(p_2) \gamma^\mu \epsilon_\mu(k_1) (\not{q}_u + m) \gamma^\nu \epsilon_\nu^*(k_2) u(p_1) e^{i\beta_u} \frac{1}{q_u^2 - m^2 + i\epsilon} \\ T_q = 2i e^2 \bar{u}(p_2) \gamma_\nu u(p_1) \epsilon_\rho(k_1) \epsilon_\sigma^*(k_2) e^{i\beta_t} \frac{1}{q_t^2 + i\epsilon} \\ (g^{\sigma\nu} q_t^\rho - g^{\nu\rho} q_t^\sigma) \sin\left(\frac{k_1 \theta k_2}{2}\right) e^{i\alpha_{t1}^3} (\cos \alpha_{t1}^0 + i f_t \sin \alpha_{t1}^0) \\ T_{k1} = 2i e^2 \bar{u}(p_2) \gamma_\nu u(p_1) \epsilon_\rho(k_1) \epsilon_\sigma^*(k_2) e^{i\beta_t} \frac{1}{q_t^2 + i\epsilon} (g^{\rho\sigma} k_1^\nu - g^{\nu\rho} k_1^\sigma) e^{\frac{i}{2} k_1 \theta k_2} e^{i\alpha_{t2}^3} \\ \left\{ (f_t \cos \alpha_{t2}^0 + i \sin \alpha_{t2}^0) \sin \alpha_{ta}^0 \cos \alpha_{ta}^3 \right. \\ \left. + (\cos \alpha_{t2}^0 + i f_t \sin \alpha_{t2}^0) \sin \alpha_{ta}^3 \cos \alpha_{ta}^0 \right\} \\ T_{k2} = 2i e^2 \bar{u}(p_2) \gamma_\nu u(p_1) \epsilon_\rho(k_1) \epsilon_\sigma^*(k_2) e^{i\beta_t} \frac{1}{q_t^2 + i\epsilon} (g^{\rho\sigma} k_2^\nu - g^{\sigma\nu} k_2^\rho) e^{-\frac{i}{2} k_1 \theta k_2} e^{i\alpha_{t3}^3} \\ \left\{ (f_t \cos \alpha_{t3}^0 + i \sin \alpha_{t3}^0) \sin \alpha_{tb}^0 \cos \alpha_{tb}^3 \right. \\ \left. + (\cos \alpha_{t3}^0 + i f_t \sin \alpha_{t3}^0) \sin \alpha_{tb}^3 \cos \alpha_{tb}^0 \right\} \\ G = 2e^2 \bar{u}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) e^{i\beta_g} e^{i\alpha_g^3} \sin\left(\frac{k_1 \theta k_2}{2}\right) \frac{1}{q_t^2 + i\epsilon} k_{2\mu} (\cos \alpha_g^0 + i f_t \sin \alpha_g^0),$$

und definieren die folgenden Größen

$$\begin{aligned}\alpha_i^\pm &= \alpha_i^0 \pm \alpha_i^3 \\ \beta_{ST_q} &= \beta_s - \beta_t = \frac{1}{2} (2p_1\theta p_2 - k_1\theta k_2) & \beta_{UT_q} &= \beta_u - \beta_t = \frac{1}{2} (2p_1\theta p_2 + k_1\theta k_2) \\ \beta_{ST_{k_1}} &= p_1\theta p_2 - k_1\theta k_2 & \beta_{UT_{k_1}} &= p_1\theta p_2 \\ \beta_{ST_{k_2}} &= p_1\theta p_2 & \beta_{UT_{k_2}} &= p_1\theta p_2 + k_1\theta k_2.\end{aligned}$$

Wenn man die obigen Amplituden quadriert, erhält man 26 Terme ($5 \cdot 5 + 1$), die folgendermaßen bezeichnet werden sollen: Das Betragsquadrat der einzelnen Amplituden bezeichnet man mit dem quadrierten Symbol für die obigen Abkürzungen. So bezeichnet zum Beispiel

$$S^2 := SS^* \quad \text{oder} \quad T_{k_2}^2 := T_{k_2} T_{k_2}^*. \quad (4.30)$$

Die Interferenzterme sind immer mit ihrem komplex-konjugiertem „Partnerterm“ zusammengefasst, so ist zum Beispiel

$$ST_{k_1} := ST_{k_1}^* + S^* T_{k_1}. \quad (4.31)$$

Nachdem man nun die Summe über die Polarisationszustände

$$\sum_{\text{Pol.}} \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* = g_{\mu\nu} \quad (4.32)$$

ausgeführt hat, erhält man mit diesen Termen, die im Anhang A.1 explizit aufgeführt sind, dann formal den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} &= \frac{1}{16\pi^2 s} \left[S^2 + U^2 + ST_q + UT_q + ST_{k_1} + UT_{k_1} + ST_{k_2} + UT_{k_2} \right. \\ &\quad \left. + T_l^2 + T_{k_1}^2 + T_{k_2}^2 + T_q T_{k_1} + T_q T_{k_2} + T_{k_1} T_{k_2} + G^2 \right]. \quad (4.33)\end{aligned}$$

Der Interferenzterm SU zwischen s - und u -Kanal ist in (4.33) nicht aufgeführt, da er identisch Null ist.

Wie man in Abbildung 4.4 sieht, kann der Wirkungsquerschnitt (4.33) *negativ* werden! Auch wenn die nicht-kommutative Skala Λ_{NC} im Beispiel 4.4 bei unrealistischen 200 GeV liegt, darf der Wirkungsquerschnitt nicht negativ werden, da im Plot alle Ordnungen in $\theta_{\mu\nu}$ berücksichtigt wurden, weshalb die Theorie für alle Skalen gültig sein muss. Da ein Wirkungsquerschnitt physikalisch nicht negativ sein kann, muss die Vorgehensweise einen Fehler aufweisen. Wir stellen diesen Fehler erst einmal zurück, und ersetzen die Summe über die Polarisationszustände ϵ_μ durch rein physikalische Polarisationsvektoren

$$\sum_{\text{Pol.}} \epsilon_\mu(k) \epsilon_\nu^*(k) \rightarrow -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu c_\nu + k_\nu c_\mu}{kc}, \quad (4.34)$$

wobei c ein weiterer Impuls am drei-Photon-Vertex ist. Wenn man dieses Vorgehen auf die Berechnung des Wirkungsquerschnitts der Compton-Streuung

Abbildung 4.4: *Beispiel für einen negativen Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung bei $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ und $c_{01} = 1$*

überträgt, ändern sich all diejenigen Terme aus (4.33), die einen Term des drei-Photon-Vertex, also T_q , T_{k1} oder T_{k2} , enthalten. Wie die Terme konkret aussehen, findet sich im Anhang A.2.

Da hier der Geist-Term G^2 natürlich entfällt, ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt zu

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \frac{1}{16\pi^2 s} [S^2 + U^2 + ST_q + UT_q + ST_{k1} + UT_{k1} + ST_{k2} + UT_{k2} + T_l^2 + T_{k1}^2 + T_{k2}^2 + T_q T_{k1} + T_q T_{k2} + T_{k1} T_{k2}], \quad (4.35)$$

der nun tatsächlich nicht negativ ist. Wie schon mehrfach angedeutet wurde, ist die Verletzung der Ward-Identität für den negativen Wirkungsquerschnitt (4.33) verantwortlich. Diese Verletzung der Ward-Identität werden wir anhand der Compton-Streuung im nächsten Kapitel auch explizit zeigen.

In diesem Kapitel haben wir zuerst gesehen, wie der differentielle Wirkungsquerschnitt der Bhabha-, Møller- und Compton-Streuung berechnet wird und wie sich die Residuen der Propagatoren änderten. Desweiteren sahen wir im letzten Abschnitt, dass der Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung *negativ* wird, wenn man, wie in der QCD, die unphysikalischen Polarisationszustände, durch das Einführen von Geist-Termen, zu entfernen versucht. Im nächsten Kapitel werden wir nun die schon öfters angesprochene Ward-Identität überprüfen, deren Gültigkeit elementar für Eichtheorien, also insbesondere für die hier vorliegende NCQED, ist.

Kapitel 5

Ward Identität

In diesem Kapitel soll die Berechnung der Ward-Identität anhand der Compton-Streuung durchgeführt werden [9]. Wie in Abschnitt 2.3 schon erwähnt wurde, ergibt sich die Ward-Identität

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle 0 | T A^\mu(x) \Phi_1(x_1) \Phi_2(x_2) \cdots \Phi_n(x_n) | 0 \rangle_{\text{amputiert, on-shell}} = 0, \quad (5.1)$$

wenn alle physikalischen Felder amputiert und auf der Massenschale (on-shell) sind, wobei die Felder Φ_j entweder Materiefelder oder Eichfelder mit physikalischer Polarisation sind.

Wie sieht nun die konkrete Berechnung von (5.1) für die Compton-Streuung in IPTO NCQED aus? Um dies zu sehen, schreiben wir die Ward-Identität zuerst im Impulsraum und erhalten mit

$$\mathcal{M}_{\text{Co}}^{(2)}(e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma) = \mathcal{M}_{\text{Co}}^{\mu\nu} \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu(k_2) \quad (5.2)$$

folgende Form der Ward-Identität

$$\mathcal{M}_{\text{Co}}^{\mu\nu} k_{1\mu} \epsilon_\nu(k_2) = \mathcal{M}_{\text{Co}}^{\mu\nu} \epsilon_\mu(k_1) k_{2\nu} = 0. \quad (5.3)$$

Das heißt: Wenn man auf der Ebene der Amplituden einen Polarisationsvektor $\epsilon_\mu(p)$ durch den entsprechenden Impuls p_μ des Photons ersetzt, muss die so abgeänderte Amplitude Null ergeben. Um nun (5.3) auszurechnen, zerlegt man die Amplitude der Compton-Streuung in die Anteile für den s -, t - und u -Kanal

$$\mathcal{M}_{\text{Co}}^{\mu\nu} \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu(k_2) = \mathcal{M}_s^{\mu\nu} \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) + \mathcal{M}_u^{\mu\nu} \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) + \mathcal{M}_t^{\mu\nu} \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2).$$

Die Summe aus s - und u -Kanal ergibt mit $q_s = p_1 + k_1 = p_2 + k_2$ und $q_u = p_1 - k_2 = p_2 - k_1$ zuerst einmal

$$\begin{aligned} & i \mathcal{M}_s^{\mu\nu} \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) + i \mathcal{M}_u^{\mu\nu} \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) \\ &= -i e^2 e^{\frac{i}{2}[p_1 \theta k_1 + k_2 \theta p_2]} \frac{1}{q_s^2 - m^2 + i\epsilon} \bar{u}(p_2) \gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{k}_1 + m) \gamma^\mu u(p_1) \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) \\ &\quad - i e^2 e^{\frac{i}{2}[k_2 \theta p_1 + p_2 \theta k_1]} \frac{1}{q_u^2 - m^2 + i\epsilon} \bar{u}(p_2) \gamma^\mu (\not{p}_2 - \not{k}_1 + m) \gamma^\nu u(p_1) \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_\nu^*(k_2) \xrightarrow{k_{2\nu}} & -i e^2 e^{\frac{i}{2}[p_1 \theta k_1 + k_2 \theta p_2]} \frac{1}{q_s^2 - m^2 + i\epsilon} \\
& \bar{u}(p_2) \gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{k}_1 + m) \gamma^\mu u(p_1) \epsilon_\mu(k_1) k_{2\nu} \\
& - i e^2 e^{\frac{i}{2}[k_2 \theta p_1 + p_2 \theta k_1]} \frac{1}{q_u^2 - m^2 + i\epsilon} \bar{u}(p_2) \gamma^\mu (\not{p}_2 - \not{k}_1 + m) \gamma^\nu u(p_1) \epsilon_\mu(k_1) k_{2\nu} \\
& = -i e^2 e^{\frac{i}{2}[p_1 \theta k_1 + k_2 \theta p_2]} \frac{1}{q_s^2 - m^2 + i\epsilon} \bar{u}(p_2) \not{k}_2 (\not{p}_1 + \not{k}_1 + m) \not{\epsilon}(k_1) u(p_1) \\
& - i e^2 e^{\frac{i}{2}[k_2 \theta p_1 + p_2 \theta k_1]} \frac{1}{q_u^2 - m^2 + i\epsilon} \bar{u}(p_2) \not{\epsilon}(k_1) (\not{p}_2 - \not{k}_1 + m) \not{k}_2 u(p_1).
\end{aligned}$$

Man hat nun vier Bedingungen, die man verwenden kann, um obige Gleichung weiter zu vereinfachen. Zuerst gilt die Gesamtimpulserhaltung $p_1 + k_1 = p_2 + k_2$. Desweiteren ist der Impuls k_1 auf der Massenschale, das heißt $k_1^2 = 0$ und das Teilchen ist physikalisch polarisiert, was bedeutet, dass $\epsilon(k_1)k_1 = 0$ ist. Zuletzt müssen auch noch die Bewegungsgleichungen $(\not{p} - m)u(p)$ und $\bar{u}(p)(\not{p} - m)$ gelten. Mit diesen Bedingungen kann man die obige Summe für $\epsilon_\mu(k_2) \rightarrow k_{2\mu}$ folgendermaßen vereinfachen

$$\begin{aligned}
& -i e^2 e^{\frac{i}{2}[p_1 \theta k_1 + k_2 \theta p_2]} \frac{1}{q_s^2 - m^2 + i\epsilon} \bar{u}(p_2) (\not{p}_1 + \not{k}_1 - \not{p}_2) (\not{p}_1 + \not{k}_1 + m) \not{\epsilon}(k_1) u(p_1) \\
& - i e^2 e^{\frac{i}{2}[k_2 \theta p_1 + p_2 \theta k_1]} \frac{1}{q_u^2 - m^2 + i\epsilon} \bar{u}(p_2) \not{\epsilon}(k_1) (\not{p}_2 - \not{k}_1 + m) (\not{p}_1 + \not{k}_1 - \not{p}_2) u(p_1) \\
& = -i e^2 e^{\frac{i}{2}[p_1 \theta k_1 + k_2 \theta p_2]} \frac{1}{q_s^2 - m^2 + i\epsilon} \bar{u}(p_2) \left((\not{p}_1 + \not{k}_1)^2 - m^2 \right) \not{\epsilon}(k_1) u(p_1) \\
& - i e^2 e^{\frac{i}{2}[k_2 \theta p_1 + p_2 \theta k_1]} \frac{1}{q_u^2 - m^2 + i\epsilon} \bar{u}(p_2) \not{\epsilon}(k_1) (-\not{p}_2 + \not{k}_1 + m^2) u(p_1) \\
& = -i e^2 e^{\frac{i}{2}[p_1 \theta k_1 + k_2 \theta p_2]} \bar{u}(p_2) \not{\epsilon}(k_1) u(p_1) \\
& + i e^2 e^{\frac{i}{2}[k_2 \theta p_1 + p_2 \theta k_1]} \bar{u}(p_2) \not{\epsilon}(k_1) u(p_1) \\
& = 2e^2 \sin\left(\frac{k_1 \theta k_2}{2}\right) e^{\frac{i}{2}p_1 \theta p_2} \bar{u}(p_2) \not{\epsilon}(k_1) u(p_1), \quad (5.4)
\end{aligned}$$

wobei bei dem letzten Gleichheitszeichen Umformungen der Impulse vorgenommen wurden. Analog erhält man für $\epsilon_\mu(k_1) \rightarrow k_{1\mu}$

$$2e^2 \sin\left(\frac{k_1 \theta k_2}{2}\right) e^{\frac{i}{2}p_1 \theta p_2} \bar{u}(p_2) \not{\epsilon}^*(k_2) u(p_1), \quad (5.5)$$

Wie man an (5.4) und (5.5) sieht, verschwinden die Pole im s - und u -Kanal, was eine notwendige Voraussetzung ist, damit die Ward-Identität erfüllt werden kann, da Beiträge von verschiedenen Kanälen sich gegenseitig aufheben müssen.

Die analoge Berechnung für den t -Kanal sieht folgendermaßen aus. Es ist

$$\begin{aligned}
i \mathcal{M}_t^{\mu\nu} \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) & = \sum_{\lambda=-}^+ \bar{u}(p_2) \left(-i e \gamma^\sigma e^{\frac{i}{2}[-p_1 \theta p_2 + \lambda q_t \theta (p_1 + p_2)]} \right) u(p_1) \\
& \frac{1}{2E_{\vec{q}_t}} \frac{-ig_{\rho\sigma}}{\lambda q_t^0 - E_{\vec{q}_t} + i\epsilon} \epsilon_\mu(k_1) (-2e [g^{\mu\rho} (P - Q)^\nu]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + g^{\mu\nu}(Q - R)^\rho + g^{\nu\rho}(R - P)^\mu] \epsilon_\nu^*(k_2) \\
& = 2e^2 \bar{u}(p_2) \gamma_\rho u(p_1) \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) [g^{\mu\nu} (k_1^\rho K_1 - k_2^\rho K_2) \\
& \quad + g^{\mu\rho} (q^\nu T - k_1^\nu K_1) + g^{\nu\rho} (k_2^\mu K_2 - q^\mu T)],
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
T &= -e^{-\frac{i}{2}p_1\theta p_2} \frac{1}{q_t^2 + i\epsilon} \sin\left(\frac{k_1\theta k_2}{2}\right) e^{i\alpha_{t1}^3} (\cos\alpha_{t1}^0 + i f_t \sin\alpha_{t1}^0) \\
K_1 &= e^{-\frac{i}{2}p_1\theta p_2} \frac{1}{q_t^2 + i\epsilon} e^{\frac{i}{2}k_1\theta k_2} e^{i\alpha_{t2}^3} \\
& \quad [(f_t \cos\alpha_{t2}^0 + i \sin\alpha_{t2}^0) \sin\alpha_{ta}^0 \cos\alpha_{ta}^3 + (\cos\alpha_{t2}^0 + i f_t \sin\alpha_{t2}^0) \sin\alpha_{ta}^3 \cos\alpha_{ta}^0] \\
K_2 &= -e^{-\frac{i}{2}p_1\theta p_2} \frac{1}{q_t^2 + i\epsilon} e^{-\frac{i}{2}k_1\theta k_2} e^{i\alpha_{t3}^3} \\
& \quad [(f_t \cos\alpha_{t3}^0 + i \sin\alpha_{t3}^0) \sin\alpha_{tb}^0 \cos\alpha_{tb}^3 + (\cos\alpha_{t3}^0 + i f_t \sin\alpha_{t3}^0) \sin\alpha_{tb}^3 \cos\alpha_{tb}^0]
\end{aligned}$$

und den in Abschnitt 4.3 aufgeführten Größen. In die obige Gleichung ging die t -Kanal Amplitude, bei der die Ableitungskopplungen nicht vertauscht wurden, ein. Für den Fall, dass die Ableitungskopplungen mit dem Zeitordnungsoperator vertauscht werden, ist es nicht möglich, den Pol des t -Kanals zu entfernen, weswegen schon auf dieser Ebene, also unabhängig von den nicht-kommutativen Phasen, die Ward-Identität verletzt ist.

Dies kann man folgendermaßen sehen. Wenn man die Ableitungskopplungen mit dem Zeitordnungsoperator vertauscht, erhält man für $i\mathcal{M}_t^{\mu\nu}\epsilon_\mu(k_1)k_2^\nu$ oder $i\mathcal{M}_t^{\mu\nu}k_1^\mu\epsilon_\nu^*(k_2)$ einen Term, der proportional zu $k_1 - k_2 + \lambda_{q_t}$ ist. Da dieser Term von dem Pol des t -Kanals abhängt und der Pol sich nicht durch einen Faktor, der proportional zu t^2 ist, entfernen lässt, muss dieser Term verschwinden. Das heißt, es muss

$$i\mathcal{M}_t^{\mu\nu}\epsilon_\mu(k_1)k_2^\nu \propto k_1 - k_2 + \lambda_{q_t} \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.6)$$

gelten. Dies ist nur dann der Fall, wenn $\lambda_{q_t} \equiv q_t = k_2 - k_1$, womit man beim Ergebnis angelangt ist, das man bei Nicht-Vertauschung erhält. Das bedeutet, dass man schon auf der Ebene der Pole die Ward-Identität bei Vertauschung, also unabhängig von dem Phasenproblem, nicht erfüllen kann. Daher kann man sagen, dass die Theorie mit Vertauschung der Ableitungskopplungen noch „weniger richtig“ ist, als die Theorie ohne Vertauschung, weshalb wir die Wahl, die wir in Abschnitt 3.3 getroffen haben, an dieser Stelle begründet haben.

Nun wollen wir mit der Berechnung der Ward-Identität fortfahren und ersetzen zuerst $\epsilon_\nu^*(k_2)$ durch $k_{2\nu}$ womit wir

$$\begin{aligned}
& i\mathcal{M}_t^{\mu\nu}\epsilon_\mu(k_1)\epsilon_\nu^*(k_2) \\
& \stackrel{\epsilon_\nu^*(k_2) \rightarrow k_{2\nu}}{=} 2e^2 \bar{u}(p_2) \not{q} u(p_1) \epsilon(k_1) k_2 T - 2e^2 \bar{u}(p_2) \not{k}_2 u(p_1) \epsilon(k_1) k_2 K_2 \\
& \quad + 2e^2 \bar{u}(p_2) \not{k}_2 u(p_1) \epsilon(k_1) k_2 K_2 - 2e^2 \bar{u}(p_2) \not{k}_2 u(p_1) \epsilon(k_1) k_1 K_1 \\
& \quad + 2e^2 \bar{u}(p_2) \not{q} (k_1) u(p_1) k_1 k_2 K_1 - 2e^2 \bar{u}(p_2) \not{q} (k_1) u(p_1) q k_2 T \\
& \quad = e^2 \bar{u}(p_2) \not{q} (k_1) u(p_1) q_t^2 (K_1 + T) \quad (5.7)
\end{aligned}$$

erhalten. Analog erhält man, wenn man $\epsilon_\mu(k_1)$ durch $k_{1\mu}$ ersetzt, folgendes Ergebnis

$$\begin{aligned}
& i \mathcal{M}_t^{\mu\nu} \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) \\
& \stackrel{\epsilon_\mu(k_1) \rightarrow k_{1\mu}}{=} 2e^2 \bar{u}(p_2) \not{k}_1 u(p_1) k_1 \epsilon^*(k_2) K_1 - 2e^2 \bar{u}(p_2) \not{k}_2 u(p_1) k_1 \epsilon^*(k_2) K_2 \\
& \quad + 2e^2 \bar{u}(p_2) \not{k}_1 u(p_1) q \epsilon^*(k_2) T - 2e^2 \bar{u}(p_2) \not{k}_1 u(p_1) k_1 \epsilon^*(k_2) K_1 \\
& \quad + 2e^2 \bar{u}(p_2) \not{\epsilon}^*(k_2) u(p_1) k_1 k_2 K_2 - 2e^2 \bar{u}(p_2) \not{\epsilon}^*(k_2) u(p_1) q k_1 T \\
& = e^2 \bar{u}(p_2) \not{\epsilon}^*(k_2) u(p_1) q_t^2 (K_2 - T) - 2i e^2 \bar{u}(p_2) \not{k}_1 u(p_1) k_1 \epsilon^*(k_2) (K_2 + T). \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Wenn die Ward-Identität nun erfüllt sein soll, muss (5.4) gleich (5.7) und (5.5) gleich (5.8) sein, was sofort drei Bedingungen ergibt:

$$K_1 + T \stackrel{!}{=} N, \quad K_2 - T \stackrel{!}{=} N \quad \text{und} \quad K_2 + T \stackrel{!}{=} 0, \quad (5.9)$$

wobei

$$N = 2 \sin \left(\frac{k_1 \theta k_2}{2} \right) e^{\frac{i}{2} p_1 \theta p_2} \frac{1}{q_t^2 + i \epsilon}$$

ist. Die letzte Bedingung folgt aus der obigen Feststellung, dass der Pol des t -Kanals verschwinden muss, damit die Ward-Identität erfüllbar ist. Dies hat dann zur Folge, dass der letzte Term in (5.8) Null ergeben muss, da dieser nicht proportional zu q_t^2 ist, womit sofort die dritte Bedingung in (5.9) folgt. Da die obigen Bedingungen von dem im 3. Kapitel bestimmten drei-Photon-Vertex der IPTO NCQED *nicht* erfüllt werden, ist somit auch die Ward-Identität nicht erfüllt!

Man kann sich nun fragen, wie ein drei-Photon-Vertex aussehen müsste, damit dieser die Ward-Identität erfüllen kann. Die Antwort ist einfach. Der Vertex muss eine Form haben, damit

$$i \mathcal{M}_t^{\mu\nu} k_{1\mu}(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) \stackrel{!}{=} i \mathcal{M}_s^{\mu\nu} k_{1\mu}(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) + i \mathcal{M}_u^{\mu\nu} k_{1\mu}(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2), \quad (5.10)$$

oder, äquivalent dazu, dass

$$K_1 = T = -K_2 = N/2 = \sin \left(\frac{k_1 \theta k_2}{2} \right) e^{\frac{i}{2} p_1 \theta p_2} \frac{1}{q_t^2 + i \epsilon}$$

gilt. Diese Bedingungen führen dann zu der folgenden Relation

$$\begin{aligned}
& \sin \left(\frac{k_1 \theta k_2}{2} \right) e^{\frac{i}{2} p_1 \theta p_2} \frac{1}{q_t^2 + i \epsilon} \\
& \propto \sum_{\lambda=-}^{+} e^{\frac{i}{2} [-p_1 \theta p_2 + \lambda q_t \theta (p_1 + p_2)]} \frac{1}{2E_{\vec{q}_t}} \frac{1}{\lambda q_t^0 - E_{\vec{q}_t} + i \epsilon} \xi(k_1, k_2, \lambda_{q_t}),
\end{aligned}$$

wobei die rechte Seite der t -Kanal Amplitude in IPTO NCQED entspricht, und $\xi(k_1, k_2, \lambda_{q_t})$ für den drei-Photon-Vertex steht. Wenn man fordert, dass ξ *nicht* von den beiden Impulsen p_1 und p_2 abhängen darf, was nichts anderes heißt,

dass der Vertex nur von den Impulsen abhängen darf, die an diesem Vertex ein- oder auslaufen, muss

$$e^{\frac{i}{2}p_1\theta p_2} \stackrel{!}{=} \sum_{\lambda=-}^{+} e^{\frac{i}{2}[-p_1\theta p_2 + \lambda_{q_t}\theta(p_1+p_2)]}$$

sein, was nur für $\lambda_{q_t} = p_1 - p_2$ der Fall ist. Entsprechend muss dann

$$\sin\left(\frac{k_1\theta k_2}{2}\right) \frac{1}{q_t^2 + i\epsilon} \stackrel{!}{=} \sum_{\lambda=-}^{+} \frac{1}{2E_{\vec{q}_t}} \frac{1}{\lambda q_t^0 - E_{\vec{q}_t} + i\epsilon} \xi(k_1, k_2, \lambda_{q_t})$$

sein, was nur für

$$\xi(k_1, k_2, \lambda_{q_t}) = \sin\left(\frac{k_1\theta k_2}{2}\right)$$

möglich ist. Man erhält somit die Feynmanregeln der naiven NCQED.

Zusammenfassend kann man sagen, was auch das wichtigste Ergebnis dieser Diplomarbeit ist, dass man die naive NCQED erhält, wenn man die IPTO NCQED so gestaltet, dass sie der Ward-Identität genügt. Somit lässt sich *keine* Eichtheorie in IPTO erstellen, was bedeutet, dass diese Raum-Zeit nicht-kommutativen Theorien nicht geeignet sind, das Unitaritätsproblem der nicht-kommutativen Theorien, die in allen Ordnungen in $\theta_{\mu\nu}$ formuliert sind, zu lösen. Eine verallgemeinerte, von der Form der Lagrangedichte und der Art der nicht-kommutativen Phase unabhängigen, Behandlung dieses Problems, findet man in [9].

Wie in der Einleitung schon erwähnt wurde, müssen zukünftige Arbeiten zeigen, ob Theorien, die dem Ansatz mit den Seiberg-Witten-Abbildungen folgen, in allen Ordnungen in $\theta_{\mu\nu}$ das gleiche Unitaritätsproblem aufweisen, wie die naive NCQFT, oder ob diese Theorien das optische Theorem erfüllen. Es muss leider der Weg gegangen werden, die verschiedenen möglichen nicht-kommutativen Erweiterungen des Standardmodells anhand von intrinsischen Inkonsistenzen auf ihre physikalische Relevanz hin zu selektieren. Es wäre erstrebenswert, weil einfacher, wenn das Experiment, bzw. die Natur, den Theoretikern sagen würde, ob eine gegebene Erweiterung des Standardmodells falsch ist. Solange solche Experimente nicht vorhanden sind, muss man zwangsläufig die möglichen Ansätze solange auf Inkonsistenzen hin überprüfen, bis - hoffentlich - nur noch ein möglicher Ansatz übrig bleibt.

Kapitel 6

Resultate

In diesem Kapitel sollen nun einige Observable von den in Kapitel 4 berechneten Streuprozessen dargestellt werden. Auch wenn die IPTO NCQED die Ward-Identität nicht erfüllt, und somit im Allgemeinen keine sinnvollen physikalischen Aussagen von dieser Theorie erwartet werden können, lohnt es, sich mit einigen der theoretisch zu erwarteten Observablen näher auseinanderzusetzen, da unter Verwendung von (4.35) die Wirkungsquerschnitte von Bhabha-, Møller- und auch Compton-Streuung positiv definit sind.

Als Beschleuniger soll hier sowohl für die Bhabha- und Møller-Streuung als auch für die Compton-Streuung ein zukünftiger Elektron-Positron-Linearcollider, ideal ist natürlich TESLA, angenommen werden. Die für die Compton-Streuung benötigten hochenergetischen Photonen werden durch einen Höchstleistungslaser, der Photonen im optischen Spektrum emittiert, erzeugt, wie das in einer Erweiterung des TESLA-Projekts geplant ist. Dieser Collider soll eine Schwerpunktsenergie von optimistischen $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ erreichen wobei der e^-e^+ - oder e^-e^- -Collider eine Luminosität von $L_{\text{ff}} = 500 \text{ fb}^{-1} \text{ a}^{-1}$ und der $e^-\gamma$ -Collider eine Luminosität von $L_{\text{fb}} \approx L_{\text{ff}}/3 = 167 \text{ fb}^{-1} \text{ a}^{-1}$ haben soll. Somit erreicht man, bei einer durchschnittlichen Messzeit von 10^7 s pro Jahr, eine integrierte Luminosität über zwei bzw. sechs Jahre von

$$N = \int_0^{6a} dt L_{\text{fb}} \approx \int_0^{2a} dt L_{\text{ff}} = 1 \text{ ab}^{-1}. \quad (6.1)$$

Zu der oben genannten Messzeit von 10^7 s pro Jahr sei angemerkt, dass dies nur dann erreicht werden kann, wenn die Messapparatur, also der Beschleuniger, sich relativ zu den von $\theta_{\mu\nu}$ ausgezeichneten Richtungen, *nicht* ändert, bzw. fest steht. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall, da ein erdgebundener Collider sich natürlich mit der Erde mit dreht. Somit würde die Messung über die Normale der Erdrotationsachse gemittelt werden. Da die Normale ebenfalls nicht raumfest ist, mittelt sich die Messung auch noch über die Ekliptik. Da dies, wenn man das alles berücksichtigen will, ein recht aufwendiges Unterfangen ist, und dies nicht das Thema dieser Arbeit ist, wird hier angenommen, dass das Experiment relativ zu den ausgezeichneten Richtungen fest stehen soll.

Anzumerken ist noch, dass hier nur Graphen gezeigt werden, wo entweder c_{01} , c_{02} oder c_{12} ungleich Null sind, da zwischen c_{02} und c_{03} bzw. c_{12} und c_{13} kein qualitativer Unterschied besteht. Desweiteren sei zur Notation Folgendes angemerkt: Wenn ein Element der $c_{\mu\nu}$ -Matrix gleich eins gesetzt wird, heißt das implizit, dass alle anderen Elemente gleich Null gesetzt sind. Weiterhin wird in jedem Plot $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ angenommen, ausgenommen natürlich die Plots von den totalen Wirkungsquerschnitten.

Es folgen nun vier Abschnitte. Im ersten Abschnitt wird derjenige Abschneideparameter für die Plots von den totalen und differentiellen Wirkungsquerschnitten bestimmt, bei dem die Anzahl der nicht-kommutativen Ereignisse maximal wird. In den beiden folgenden Abschnitten wird dann unter Verwendung des in Abschnitt 6.1 bestimmten besten Abschneideparameters einmal der totale und dann der differentielle Wirkungsquerschnitt der einzelnen Streuprozesse gezeigt. Zum Schluss sind dann noch die Plots von der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie (forward-backward-asymmetry, FBA) gezeigt, für die zuerst nochmals ein bester Abschneideparameter bestimmt werden muss, da der im ersten Abschnitt bestimmte Parameter bei der FBA nicht mehr optimal ist.

6.1 Beste Abschneideparameter

Zuerst stellt sich die Frage, für welchen Abschneideparameter ϵ man bei einem gegebenen Streuprozess am meisten Ereignisse pro Zeiteinheit erwarten darf. Je kleiner man den Bereich wählt, aus dem man Ereignisse für die Auswertung nimmt, desto weniger Ereignisse bekommt man während der Messzeit. Wenn man jedoch den Bereich, aus dem man die Ereignisse herrannimmt, geeignet wählt, nimmt die Sensitivität der Observablen auf Abweichungen zum Standardmodell zu. Um nun den optimalen Abschneideparameter zu finden, ist in den Abbildungen 6.1 bis 6.8 die Größe

$$\frac{N_{\text{NC}} - N_{\text{SM}}}{\sqrt{N_{\text{SM}}}} \quad (6.2)$$

mit

$$N_{\text{NC, SM}} := N \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} d \cos \vartheta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d\sigma_{\text{NC, SM}}}{d \cos \vartheta d\phi} \quad (6.3)$$

über ϵ aufgetragen. Die Größe in Gleichung 6.2 gibt die Anzahl der Ereignisse pro Jahr, normiert auf eine Standardabweichung $\sqrt{N_{\text{SM}}}$, an. Man sieht nun, dass zum Beispiel für die Bhabha-Streuung bei $c_{01} = 1$ (Abbildung 6.1), das Maximum, also der beste Wert für den Abschneideparameter, bei ca. $\epsilon = 0,3$ liegt. Bei der Compton-Streuung hingegen (Abbildungen 6.3 bis 6.5) liegt der beste Wert für den Abschneideparameter bei $\epsilon \rightarrow 0$. Dies ist leicht einzusehen, wenn man sich ins Gedächtnis ruft, dass bei der Compton-Streuung der t -Kanal neu hinzugekommen ist. Dieser neue Beitrag ist aber gerade für kleine ϵ 's divergent und damit entsprechend auch die Differenz zwischen Standardmodell und NC-QED. Die besten ermittelten Parameter sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst.

Da der Messbereich der Detektoren für $\cos\vartheta \rightarrow \pm 1$ apparativ beschränkt ist, setzten wir den Abschneideparameter bei der Compton-Streuung auf $\epsilon = 0.15$, was einen Abschneidewinkel von $\vartheta = \arccos 0.15 = 8.63^\circ$ entspricht. Dieser Wert ist für $e^-\gamma$ -Collider zwar optimistisch, aber durchaus nicht utopisch. Bei der Møller-Streuung ergibt sich für $c_{01} = 1$ ein optimaler Abschneideparameter von $\vartheta = \arccos 0.078 = 4.47^\circ$, was für einen e^-e^- -Collider nicht zu optimistisch ist.

	Bhabha	Compton	Møller
c_{01}	0,315 (18,36°)	0,15 (8,63°)	0,078 (4,47°)
c_{02}	0,487 (29,14°)	0,15 (8,63°)	0,375 (22,02°)
c_{12}	-	0,15 (8,63°)	0,406 (23,95°)

Tabelle 6.1: *Optimale Werte für den Abschneideparameter ϵ für die Plots der Wirkungsquerschnitte, in Klammern ist der Winkel in grad angegeben*

Abbildung 6.1: *Normierte Rate der Bhabha-Streuung bei $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ und $c_{01} = 1$*

Abbildung 6.2: *Normierte Rate der Bhabha-Streuung bei $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ und $c_{02} = 1$*

Abbildung 6.3: *Normierte Rate der Compton-Streuung bei $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ und $c_{01} = 1$*

Abbildung 6.4: *Normierte Rate der Compton-Streuung bei $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ und $c_{02} = 1$*

Abbildung 6.5: *Normierte Rate der Compton-Streuung bei $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ und $c_{12} = 1$*

Abbildung 6.6: *Normierte Rate der Møller-Streuung bei $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ und $c_{01} = 1$*

Abbildung 6.7: *Normierte Rate der Møller-Streuung bei $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ und $c_{02} = 1$*

Abbildung 6.8: *Normierte Rate der Møller-Streuung bei $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ und $c_{12} = 1$*

6.2 Totaler Wirkungsquerschnitt

Die Plots vom totalen Wirkungsquerschnitt sind in den Abbildungen 6.9 bis 6.16 für die jeweils besten Abschneideparameter gezeigt. Bei der Bhabha- und Møller-Streuung ist für $\Lambda_{\text{NC}} = 5 \text{ TeV}$ kein Unterschied zum Standardmodell mehr festzustellen, weswegen die Kurven, im Gegensatz zur Compton-Streuung, weggelassen wurden. An den Plots der Bhabha-Streuung sieht man, wie der Wirkungsquerschnitt bei $c_{01} = 1$ und $c_{02} = 1$ (Abbildungen 6.9 und 6.10) für große s linear anwächst. Dies erwartet man auch, da der Term im Wirkungsquerschnitt der Bhabha-Streuung (4.18), der proportional zu Δ_{Bh}^2 ist, linear in s ist.

Bei der Compton- und Møller-Streuung sieht man, im Gegensatz zur Bhabha-Streuung, zum Teil recht wilde Oszillationen. Diese Oszillationen kommen von den Faktoren, die vor den einzelnen Termen in den Wirkungsquerschnitten (4.35) und (4.24) stehen. Diese Faktoren bestehen aus trigonometrischen Funktionen, deren Argumente proportional zu s/Λ_{NC}^2 sind. Dies ist der Grund, weshalb die Frequenz der Oszillation auf der einen Seite mit anwachsendem s zunimmt und auf der anderen Seite mit wachsendem Λ_{NC} , von $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$ zu

$\Lambda_{\text{NC}} = 2 \text{ TeV}$ oder $\Lambda_{\text{NC}} = 5 \text{ TeV}$, abnimmt, wie man teilweise schön in den Abbildungen 6.11 bis 6.16 sehen kann.

Anzumerken ist noch, dass die Skala des Wirkungsquerschnitts bei den Plots der Bhabha-Streuung, anders als bei Compton- und Møller-Streuung, logarithmisch ist.

Abbildung 6.9: *Totaler Wirkungsquerschnitt der Bhabha-Streuung für $c_{01} = 1$*

Abbildung 6.10: *Totaler Wirkungsquerschnitt der Bhabha-Streuung für $c_{02} = 1$*

Abbildung 6.11: *Totaler Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung für $c_{01} = 1$*

Abbildung 6.12: *Totaler Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung für $c_{02} = 1$*

6.3 Differentieller Wirkungsquerschnitt

In diesem Abschnitt sind die differentiellen Wirkungsquerschnitte für $d\sigma/d\cos\vartheta$ in den Abbildungen 6.17 bis 6.24 und für $d\sigma/d\phi$ in den Abbildungen 6.25 bis 6.29 dargestellt. Wenn man die Gleichungen für den differentiellen Wirkungsquerschnitt betrachtet, sieht man zum Beispiel an (4.24), dass nur die Faktoren von c_{02} und c_{12} - entsprechend natürlich auch c_{03} und c_{13} - von ϕ abhängen. Demnach ergibt ein Plot über ϕ , bei dem nur $c_{01} = 1$ wäre, eine Konstante, weswegen diese Plots nicht gezeigt sind. Die Plots sind natürlich jeweils für den besten Abschneideparameter aus Tabelle 6.1 dargestellt.

Abbildung 6.13: *Totaler Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung für $c_{12} = 1$*

Abbildung 6.14: *Totaler Wirkungsquerschnitt der Møller-Streuung für $c_{01} = 1$*

Abbildung 6.15: *Totaler Wirkungsquerschnitt der Møller-Streuung für $c_{02} = 1$*

Abbildung 6.16: *Totaler Wirkungsquerschnitt der Møller-Streuung für $c_{12} = 1$*

6.3.1 Graphen über $\cos \vartheta$

An den Plots der Bhabha-Streuung in Abbildung 6.17 sieht man, dass für $\cos \vartheta < 0$ die nicht-kommutativen Effekte sichtbar werden. Dies kann man an dem differentiellen Wirkungsquerschnitt (4.18) sehen, da für negative $\cos \vartheta$ der Term, der von der nicht-kommutativen Größe Δ_{Bh} abhängt, relativ zu den anderen Termen groß wird. Wenn man berücksichtigt, dass bei den Plots in den Abbildungen 6.17 und 6.18 eine logarithmische Skala vorliegt, sieht man, dass selbst bei $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$ kein wirklich großer Effekt zu sehen ist.

Bei der Compton-Streuung in den Abbildungen 6.19 bis 6.21, sieht man, dass der Wirkungsquerschnitt für $\cos \vartheta \rightarrow 1$ divergiert. Dies liegt an den nicht-kommutativen Termen des Wirkungsquerschnitts (4.35), die von dem drei-Photon-Vertex herrühren. Diese Terme sind alle proportional zu dem Faktor su/t^2 (siehe Anhang A.2), der, wie schon gesagt, für $\cos \vartheta \rightarrow 1$ divergent ist. Wegen dieser Divergenz sieht man, im Gegensatz zur Bhabha- und Møller-Streuung, auch für $\Lambda_{\text{NC}} = 2 \text{ TeV}$ noch einen Unterschied zum Standardmodell.

Bei der Møller-Streuung ist die Änderung gegenüber dem Standardmodell nur sehr klein, wie man an den Abbildungen 6.22 bis 6.24 sieht. Es ist eigentlich

nur eine leichte Verschiebung des Wirkungsquerschnitts hin zu kleineren Größen sichtbar.

Abbildung 6.17: *Differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\cos\vartheta$ der Bhabha-Streuung für $c_{01} = 1$*

Abbildung 6.18: *Differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\cos\vartheta$ der Bhabha-Streuung für $c_{02} = 1$*

Abbildung 6.19: *Differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\cos\vartheta$ der Compton-Streuung für $c_{01} = 1$*

Abbildung 6.20: *Differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\cos\vartheta$ der Compton-Streuung für $c_{02} = 1$*

6.3.2 Graphen über ϕ

Bei den Plots über den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\phi$ ist anzumerken, dass alle Graphen eine Periode von 2π aufweisen, was man auch erwarten würde, da die ϕ -Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Form $\cos(\sin\phi)$ ist. Der Wirkungsquerschnitt der Bhabha- und Compton-Streuung ist, anders als bei der Møller-Streuung, immer größer oder gleich dem Wirkungsquerschnitt des Standardmodells (siehe Abbildungen 6.25 bis 6.29). Dies kann man sich klar machen, indem man sich wiederum die Wirkungsquerschnitte anschaut. Bei der Bhabha-Streuung ist Δ_{Bh}^2 der nicht-kommutative Term, der offensichtlich immer größer gleich Null ist. Bei der Møller-Streuung enthalten die ausschließlich positiven Termen Cosinus-Funktionen, die immer kleiner gleich eins sind, weswegen hier der Wirkungsquerschnitt immer kleiner gleich dem des Standardmodells ist. Bei der Compton-Streuung lässt sich das Aussehen der Plots so erklären, dass an den negativ beitragenden Interferenztermen des drei-Photon-Vertex ebenfalls Cosinus- und Sinus-Funktionen stehen, die deshalb die negativ

Abbildung 6.21: *Differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\cos\vartheta$ der Compton-Streuung für $c_{12} = 1$*

Abbildung 6.22: *Differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\cos\vartheta$ der Møller-Streuung für $c_{01} = 1$*

Abbildung 6.23: *Differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\cos\vartheta$ der Møller-Streuung für $c_{02} = 1$*

Abbildung 6.24: *Differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\cos\vartheta$ der Møller-Streuung für $c_{12} = 1$*

beitragenden Terme verkleinern, woraus folgt, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt demnach immer größer oder gleich dem des Standardmodells sein muss.

6.4 Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie

In diesem Abschnitt soll die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie (Forward-Backward-Asymmetry, FBA) über die nicht-kommutative Skala Λ_{NC} aufgetragen werden. Da der optimale Abschneideparameter ϵ für die Wirkungsquerschnitte aus Abschnitt 6.1 nicht mehr zwangsläufig für die FBA optimal ist, wird zuerst der Abschneideparameter bestimmt, der die FBA maximal werden lässt.

Die FBA gibt die Asymmetrie zwischen Vorwärts- und Rückwärtsstreuung an, die folgendermaßen definiert ist

$$A_{\text{FB}} := \frac{\sigma_f - \sigma_b}{\sigma_f + \sigma_b}, \quad (6.4)$$

Abbildung 6.25: *Differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\phi$ der Bhabha-Streuung für $c_{02} = 1$*

Abbildung 6.26: *Differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\phi$ der Bhabha-Streuung für $c_{02} = 1$*

Abbildung 6.27: *Differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\phi$ der Compton-Streuung für $c_{12} = 1$*

Abbildung 6.28: *Differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\phi$ der Møller-Streuung für $c_{02} = 1$*

wobei

$$\sigma_f = \int_0^{1-\epsilon} d\cos\vartheta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d\sigma}{d\cos\vartheta d\phi} \quad \sigma_b = \int_{-1+\epsilon}^0 d\cos\vartheta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d\sigma}{d\cos\vartheta d\phi}$$

ist. Da die Møller-Streuung auch in IPTO NCQED explizit symmetrisch in $\cos\vartheta$ ist, werden hier von der Møller-Streuung keine Plots gezeigt, da sie trivial identisch Null sind.

Um nun den besten Abschneideparameter zu bestimmen, ist in den Abbildungen 6.30 bis 6.34 für verschiedene Λ_{NC} 's die Differenz der FBA von NCQED und QED über ϵ aufgetragen. Wie nicht anders zu erwarten war, ist es bei der Compton-Streuung am Besten, den Abschneideparameter ϵ so klein wie möglich zu wählen. Bei der Bhabha-Streuung verschiebt sich der optimale Wert für den Abschneideparameter nach oben. Man erhält für $c_{01} = 1, \epsilon = 0,40$ und für $c_{02} = 1, \epsilon = 0,47$. Mit den entsprechenden Werten, die nochmals in der Tabelle 6.2 zusammengefasst sind, erhält man dann die Plots für die FBA in den Abbildungen 6.35 bis 6.39. Wie man sieht, unterscheidet sich die FBA bei der Compton-Streuung, im Gegensatz zur Bhabha-Streuung, wegen des drei-Photon-Vertex recht stark von derjenigen des Standardmodells. Es sind auch

Abbildung 6.29: *Differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\phi$ der Møller-Streuung für $c_{12} = 1$*

Abbildung 6.30: *Optimaler Abschneideparameter für die Forward-Backward-Asymmetry der Bhabha-Streuung für $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ und $c_{01} = 1$*

Abbildung 6.31: *Optimaler Abschneideparameter für die Forward-Backward-Asymmetry der Bhabha-Streuung für $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ und $c_{02} = 1$*

noch Unterschiede bei $\Lambda_{\text{NC}} = 3 \text{ TeV}$, also bei der dreifachen Schwerpunktsenergie, festzustellen. Demnach eignet sich die Compton-Streuung, relativ zu den hier besprochenen Streuprozessen, besonders gut, um neue nicht-kommutative Physik zu entdecken.

	Bhabha	Compton
c_{01}	0,40 (23.58°)	0,15 (8,63°)
c_{02}	0,47 (28.03°)	0,15 (8,63°)
c_{12}	-	0,15 (8,63°)

Tabelle 6.2: *Optimale Werte für den Abschneideparameter ϵ für die Plots der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie, in Klammern ist der Winkel in grad angegeben*

Abbildung 6.32: *Optimaler Abschneideparameter für die Forward-Backward-Asymmetry der Compton-Streuung für $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ und $c_{01} = 1$*

Abbildung 6.33: *Optimaler Abschneideparameter für die Forward-Backward-Asymmetry der Compton-Streuung für $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ und $c_{02} = 1$*

Abbildung 6.34: *Optimaler Abschneideparameter für die Forward-Backward-Asymmetry der Compton-Streuung für $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ und $c_{12} = 1$*

Abbildung 6.35: *ForwardBackward-Asymmetry der Bhabha-Streuung für $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$, $c_{01} = 1$ und $\epsilon = 0.4$*

Abbildung 6.36: *ForwardBackward-Asymmetry der BhabhaStreuung für $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$, $c_{02} = 1$ und $\epsilon = 0.47$*

Abbildung 6.37: *ForwardBackward-Asymmetry der ComptonStreuung für $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$, $c_{01} = 1$ und $\epsilon = 0.15$*

Abbildung 6.38: *ForwardBackward-Asymmetry der ComptonStreuung für $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$, $c_{02} = 1$ und $\epsilon = 0.15$*

Abbildung 6.39: *ForwardBackward-Asymmetry der ComptonStreuung für $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$, $c_{12} = 1$ und $\epsilon = 0.15$*

Kapitel 7

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Entwicklung der wechselwirkungspunktzeitgeordneten nicht-kommutativen Quantenelektrodynamik fortgeführt und dann gezeigt, dass diese Theorie nicht die Ward-Identität erfüllen kann, weshalb dieser Ansatz einer nicht-kommutativen QED nicht das Unitaritätsproblem der naiven NCQED lösen kann.

Im ersten Kapitel haben wir zuerst allgemein nicht-kommutative Theorien motiviert, indem wir dargelegt haben, dass Theorien auf quantisierter Raumzeit eine natürliche Fortsetzung der quantenmechanischen Prinzipien sind. Desweiteren wurde dargelegt, welche Annahmen für die hier besprochenen Theorie bezüglich der Art der nicht-kommutativen Koordinaten und des nicht-kommutativen Parameters getroffen wurden.

Im nächsten Kapitel haben wir dann die formalen Grundlagen der NCQED besprochen, wo wir zuerst ausgeführt haben, wie die Nicht-Kommutativität der Raumzeit auf das Produkt zwischen zwei Felder mit kommutativen Koordinaten abgebildet wird. Anschließend haben wir gezeigt, dass die so erhaltene Lagrangedichte eichinvariant ist und haben dann kurz erläutert, dass aus dem BRST Formalismus die in dieser Arbeit besonders wichtige Ward-Identität folgt. Abgeschlossen haben wir dieses Kapitel mit der Motivation für die hier besprochene wechselwirkungspunktzeitgeordnete nicht-kommutative Quantenelektrodynamik (IPTO NCQED), die von [13, 14, 15, 16] angeregt und eingeführt wurde. Es zeigte sich nämlich [11], dass bei naiver Anwendung der Störungstheorie, die Unitarität für Raum-Zeit Nicht-Kommutativität verletzt wird, was zur Folge hat, dass eine quantenmechanische Interpretation dieser Theorie nicht mehr möglich ist.

Im folgenden Kapitel haben wir dann anhand der Amplitude der Bhabha- und Compton-Streuung den Fermion-Boson-Vertex, den drei-Photon-Vertex, den Photon-Geist-Vertex und die Propagatoren für die Photonen und Fermionen bestimmt. Den noch verbleibenden vier-Photon-Vertex und den

Geist-Propagator haben wir dann direkt aus der Lagrangedichte berechnet. Wie sich herausstellte, erhielten wir für jeden sonst üblichen Feynmangraphen zwei Graphen, da sich der Teilchen- und Antiteilchen-Beitrag nicht mehr zusammenfassen ließ, da die Energieerhaltung in den nicht-kommutativen Phasen verletzt war. Als eine Folge dieser Verletzung der Energieerhaltung sahen wir, dass sich das Residuum der Propagatoren änderte. Einerseits hingen die Propagatoren der IPTO NCQED von den nicht-kommutativen Phasen ab und andererseits waren sie auch komplexwertig, was Anlass zur Hoffnung gab, dass bei dieser Theorie die Unitarität auch für die NCQED erhalten bleibt.

Anschließend wurde dann anhand der im vorherigen Kapitel bestimmten Feynmanregeln der differentielle Wirkungsquerschnitt der Bhabha-, Möller- und Compton-Streuung berechnet. Dabei stellte sich heraus, dass der Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung negativ wurde! Da dies physikalisch unmöglich ist, gab es nur die eine Schlussfolgerung, dass die unphysikalischen Polarisationszustände, die bei der Compton-Streuung entstehen, durch die Geist-Terme nicht entfernt werden, was bedeutet, dass die Theorie nicht eichinvariant sein kann.

Und tatsächlich war die Ward-Identität, die wir im nächsten Kapitel überprüften, verletzt. Wir konnten sogar zeigen, dass man die Feynmanregeln der naiven NCQED erhält, wenn man die Ward-Identität in IPTO NCQED erfüllen will. Ursächlich für die Verletzung der Unitarität war die Verletzung der Energieerhaltung in den Phasen, was aber gerade den Unterschied der IPTO zur naiven NCQED darstellt. In [9] wurde von R. Rückl, T. Ohl und dem Autor gezeigt, dass es, unabhängig von der Form der nicht-kommutativen Phase, nicht möglich ist, die Ward-Identität in IPTO NCQED zu erfüllen.

Trotz der Zweifel an der Konsistenz dieser Theorie, haben wir im letzten Kapitel noch den totalen und differentiellen Wirkungsquerschnitt und die Vorwärts-Rückwärts-Streuung der oben genannten Streuprozesse dargestellt. Den Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung haben wir auch ploten können, da man in Baumgraphennäherung die unphysikalischen Polarisationszustände explizit entfernen kann. Der so erhaltene Wirkungsquerschnitt war dann tatsächlich positiv definit.

Die wichtigste Erkenntnis dieser Arbeit ist die, dass sich das Unitaritäts-Problem der naiven NCQED für Raum-Zeit Nicht-Kommutativität nicht mit der IPTO NCQED lösen lässt, weswegen man sich die Frage stellen muss, wie Theorien in Wechselwirkungspunkt-Zeitordnung physikalisch relevant werden können.

Anhang A

Compton-Streuung *ohne* Vertauschung

In diesem Kapitel des Anhangs sind die Terme des differentiellen Wirkungsquerschnitts der Compton-Streuung explizit aufgelistet, bei der die Ableitungskopplungen *nicht* mit dem Zeitordnungsoperator vertauscht werden (siehe Abschnitt 3.3).

Im ersten Abschnitt werden die Terme des Wirkungsquerschnitts aufgeführt, bei denen versucht wird, die unphysikalischen Polarisationszustände durch die Geist-Amplitude zu entfernen, was ja, siehe Abschnitt 4.3, nicht gelang. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels werden dann die Terme des Wirkungsquerschnitts aufgelistet, die man dadurch bekommt, indem man die Summe über die Polarisationsvektoren durch explizit physikalisch polarisierte Photonimpulse ersetzt, wodurch der differentielle Wirkungsquerschnitt positiv definit bleibt (siehe ebenfalls Abschnitt 4.3).

A.1 Mit Geist-Term

Hier sollen die Terme, die in den Wirkungsquerschnitt (4.33) eingehen, explizit aufgeführt werden. Die Abkürzungen, die hier verwendet werden, sind in Abschnitt 4.3 zu finden. Nach längerem Rechnen und Vereinfachen erhält man für die quadrierte Amplitude die folgenden 16 Terme, in denen die 26 Summanden zusammengefasst sind.

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} SS^* = -2e^4 \frac{u}{s} \\ U^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} UU^* = -2e^4 \frac{s}{u} \\ \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} SU^* &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} US^* = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ST_q &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (ST_q^* + T_q S^*) \\
&= -4e^4 \sin \beta_{k12} \frac{s}{u} [(f_t + 1) \sin(\alpha_{t1}^+ - \beta_{UT_q}) + (f_t - 1) \sin(\alpha_{t1}^- + \beta_{UT_q})] \\
UT_q &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (UT_q^* + T_q U^*) \\
&= 4e^4 \sin \beta_{k12} \frac{u}{s} [(f_t + 1) \sin(\alpha_{t1}^+ - \beta_{UT_q}) + (f_t - 1) \sin(\alpha_{t1}^- + \beta_{UT_q})] \\
ST_{k1} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (ST_{k1}^* + T_{k1} S^*) = -2e^4 \frac{u}{t} [(f_t + 1) \sin(\alpha_{t2}^+ - \beta_{ST_{k1}}) \sin \alpha_{k2}^+ \\
&\quad - (f_t - 1) \sin(\alpha_{t2}^- + \beta_{ST_{k1}}) \sin \alpha_{k2}^+] \\
UT_{k2} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (UT_{k2}^* + T_{k2} U^*) = 2e^4 \frac{s}{t} [(f_t + 1) \sin(\alpha_{t3}^+ - \beta_{UT_{k2}}) \sin \alpha_{k1}^+ \\
&\quad - (f_t - 1) \sin(\alpha_{t3}^- + \beta_{UT_{k2}}) \sin \alpha_{k1}^+] \\
ST_{k2} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (ST_{k2}^* + T_{k2} S^*) = -2e^4 \left(\frac{u}{s} + \frac{t}{s} - \frac{s}{t} \right) \\
&\quad [(f_t + 1) \sin(\alpha_{t3}^+ - \beta_{ST_{k2}}) \sin \alpha_{k1}^+ - (f_t - 1) \sin(\alpha_{t3}^- + \beta_{ST_{k2}}) \sin \alpha_{k1}^+] \\
UT_{k1} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (UT_{k1}^* + T_{k1} U^*) = 2e^4 \left(\frac{s}{u} + \frac{t}{u} - \frac{u}{t} \right) \\
&\quad [(f_t + 1) \sin(\alpha_{t2}^+ - \beta_{UT_{k1}}) \sin \alpha_{k2}^+ - (f_t - 1) \sin(\alpha_{t2}^- + \beta_{UT_{k1}}) \sin \alpha_{k2}^+] \\
T_q T_{k1} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (T_q T_{k1}^* + T_{k1} T_q^*) = -e^4 \frac{(t-s)^{\frac{1}{2}} (\sqrt{-st} - t)}{t^2} \sin \beta_{k12} \\
&\quad \left[(f_t + 1)^2 \cos(\alpha_{t1}^+ - \alpha_{t2}^+ - \beta_{k12}) \sin \alpha_{k2}^+ \right. \\
&\quad - (f_t - 1)^2 \cos(\alpha_{t1}^- - \alpha_{t2}^- + \beta_{k12}) \sin \alpha_{k2}^- \\
&\quad + (f_t^2 - 1) \left\{ -\cos(\alpha_{t1}^+ + \alpha_{t2}^- - \beta_{k12}) \sin \alpha_{k2}^- \right. \\
&\quad \left. \left. - \cos(\alpha_{t1}^- + \alpha_{t2}^+ + \beta_{k12}) \sin \alpha_{k2}^+ \right\} \right] \\
T_q T_{k2} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (T_q T_{k2}^* + T_{k2} T_q^*) = -e^4 \frac{(t-s)^{\frac{1}{2}} (\sqrt{-st} - t)}{t^2} \sin \beta_{k12} \\
&\quad \left[(f_t + 1)^2 \cos(\alpha_{t1}^+ - \alpha_{t3}^+ - \beta_{k12}) \sin \alpha_{k1}^+ \right. \\
&\quad - (f_t - 1)^2 \cos(\alpha_{t1}^- - \alpha_{t3}^- + \beta_{k12}) \sin \alpha_{k1}^- \\
&\quad + (f_t^2 - 1) \left\{ -\cos(\alpha_{t1}^+ + \alpha_{t3}^- - \beta_{k12}) \sin \alpha_{k1}^- \right. \\
&\quad \left. \left. - \cos(\alpha_{t1}^- + \alpha_{t3}^+ - \beta_{k12}) \sin \alpha_{k1}^+ \right\} \right] \\
T_{k1} T_{k2} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (T_{k1} T_{k2}^* + T_{k2} T_{k1}^*) = -3e^4 \frac{su}{t^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[(f_t + 1)^2 \cos(\alpha_{t2}^+ - \alpha_{t3}^+ + 2\beta_{k12}) \sin \alpha_{k1}^+ \sin \alpha_{k2}^+ \right. \\
& \quad + (f_t - 1)^2 \cos(\alpha_{t1}^- - \alpha_{t3}^- - 2\beta_{k12}) \sin \alpha_{k1}^- \sin \alpha_{k2}^- \\
& \quad + (f_t^2 - 1) \cos(\alpha_{t1}^+ + \alpha_{t3}^- + 2\beta_{k12}) \sin \alpha_{k1}^- \sin \alpha_{k2}^+ \\
& \quad \left. + (f_t^2 - 1) \cos(\alpha_{t1}^- + \alpha_{t3}^+ - 2\beta_{k12}) \sin \alpha_{k1}^+ \sin \alpha_{k2}^- \right] \\
T_q^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} T_q T_q^* = 8e^4 \sin^2 \beta_{k12} (\cos^2 \alpha_{t1}^0 + f_t^2 \sin^2 \alpha_{t1}^0) \\
T_{k1}^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} T_{k1} T_{k1}^* = -e^4 \frac{su}{t^2} \left[(f_t + 1)^2 \sin^2 \alpha_{k2}^+ + (f_t - 1)^2 \sin^2 \alpha_{k2}^- \right. \\
& \quad \left. + 2(f_t^2 - 1) (\cos^2 \alpha_{t2}^+ - \sin^2 \alpha_{t2}^+) \sin \alpha_{k2}^- \sin \alpha_{k2}^+ \right] \\
T_{k2}^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} T_{k2} T_{k2}^* = -e^4 \frac{su}{t^2} \left[(f_t + 1)^2 \sin^2 \alpha_{k1}^+ + (f_t - 1)^2 \sin^2 \alpha_{k1}^- \right. \\
& \quad \left. + 2(f_t^2 - 1) (\cos^2 \alpha_{t3}^+ - \sin^2 \alpha_{t3}^+) \sin \alpha_{k1}^- \sin \alpha_{k1}^+ \right] \\
G^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} G G^* = -2e^4 \frac{su}{t^2} \sin^2 \beta_{k12} (\cos^2 \alpha_{g1}^0 + f_t^2 \sin^2 \alpha_{g1}^0) .
\end{aligned}$$

Wenn man nun ins Schwerpunktsystem übergeht, wobei die Impulse wie bei der Bhabha-Streuung gewählt sind, bekommt man für die relevanten Größen

$$\begin{aligned}
f_t &= 0 \\
\alpha_{t1}^\pm &= \frac{1}{2\lambda_{\text{NC}}^2} \left(c_{01} \sqrt{-st} \pm c_{01}t + \sqrt{tu} [(c_{02} + c_{12}) \cos \phi + (c_{03} + c_{13}) \sin \phi] \right) \\
\alpha_{t2}^\pm &= \frac{1}{4\lambda_{\text{NC}}^2} \left(\sqrt{-st} [c_{01} \sqrt{1-tu} + \sqrt{tu} (c_{02} \cos \phi + c_{03} \sin \phi)] \right. \\
& \quad \left. \pm 3c_{01}t + \sqrt{tu} [(3c_{02} + c_{12}) \cos \phi + (3c_{03} + c_{13}) \sin \phi] \right) \\
\alpha_{t3}^\pm &= \alpha_g^\pm = \frac{1}{4\lambda_{\text{NC}}^2} \left(\sqrt{-st} [c_{01} (-u + \sqrt{1-tu}) + 2\sqrt{tu} (c_{02} \cos \phi + c_{03} \sin \phi)] \right. \\
& \quad \left. \pm c_{01}t + \sqrt{tu} [(c_{02} + 3c_{12}) \cos \phi + (c_{03} + 3c_{13}) \sin \phi] \right) \\
\alpha_{k1}^\pm &= \frac{1}{4\lambda_{\text{NC}}^2} \left(-c_{01} \sqrt{-st} \pm c_{01}t + \sqrt{tu} [(c_{02} - c_{12}) \cos \phi + (c_{03} - c_{13}) \sin \phi] \right) \\
\alpha_{k2}^\pm &= \frac{1}{4\lambda_{\text{NC}}^2} \left(-\sqrt{-st} [c_{01} \sqrt{1-tu} + \sqrt{tu} (c_{02} \cos \phi + c_{03} \sin \phi)] \right. \\
& \quad \left. \pm c_{01}t + \sqrt{tu} [(c_{02} - c_{12}) \cos \phi + (c_{03} - c_{13}) \sin \phi] \right) \\
\beta_{ST_q} &= \frac{1}{4\lambda_{\text{NC}}^2} \left(3c_{01}t + \sqrt{tu} [(3c_{02} + c_{12}) \cos \phi + (3c_{03} + c_{13}) \sin \phi] \right) \\
\beta_{UT_q} &= \frac{1}{4\lambda_{\text{NC}}^2} \left(c_{01}t + \sqrt{tu} [(c_{02} + 3c_{12}) \cos \phi + (c_{03} + 3c_{13}) \sin \phi] \right) \\
\beta_{ST_{k1}} &= \frac{1}{\lambda_{\text{NC}}^2} \left(c_{01}t + \sqrt{tu} [c_{02} \cos \phi + c_{03} \sin \phi] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{UT_{k1}} &= \beta_{ST_{k2}} = \frac{1}{2\lambda_{\text{NC}}^2} \left(c_{01}t + \sqrt{tu} [(c_{02} + c_{12}) \cos \phi + (c_{03} + c_{13}) \sin \phi] \right) \\
\beta_{UT_{k2}} &= \frac{1}{\lambda_{\text{NC}}^2} \sqrt{tu} [c_{02} \cos \phi + c_{03} \sin \phi] \\
\beta_{k12} &= \beta_{ST_{k2}} = -\frac{1}{2\lambda_{\text{NC}}^2} \left(c_{01}t + \sqrt{tu} [(c_{02} - c_{12}) \cos \phi + (c_{03} - c_{13}) \sin \phi] \right),
\end{aligned}$$

womit sich die obigen Terme noch etwas vereinfachen lassen, was hier aber nicht explizit vorgeführt werden soll.

A.2 Ohne Geist-Felder

In diesem Abschnitt stehen nun diejenigen Terme, die sich von den Termen im vorherigen Abschnitt unterscheiden, wenn man nicht die Geist-Amplitude verwendet, um die unphysikalischen Polarisationszustände zu entfernen (siehe Abschnitt 4.3).

$$\begin{aligned}
ST_q &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (ST_q^* + T_q S^*) = 0 \\
UT_q &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (UT_q^* + T_q U^*) = 0 \\
ST_{k1} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (ST_{k1}^* + T_{k1} S^*) = 4e^4 \frac{su}{t^2} \left[(f_t + 1) \sin(\alpha_{t2}^+ - \beta_{ST_{k1}}) \sin \alpha_{k2}^+ \right. \\
&\quad \left. - (f_t - 1) \sin(\alpha_{t2}^- + \beta_{ST_{k1}}) \sin \alpha_{k2}^- \right] \\
UT_{k2} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (UT_{k2}^* + T_{k2} U^*) = 4e^4 \frac{su}{t^2} \left[(f_t + 1) \sin(\alpha_{t3}^+ - \beta_{UT_{k2}}) \sin \alpha_{k1}^+ \right. \\
&\quad \left. - (f_t - 1) \sin(\alpha_{t3}^- + \beta_{UT_{k2}}) \sin \alpha_{k1}^- \right] \\
ST_{k2} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (ST_{k2}^* + T_{k2} S^*) = 4e^4 \frac{su}{t^2} \left[(f_t + 1) \sin(\alpha_{t3}^+ - \beta_{ST_{k2}}) \sin \alpha_{k1}^+ \right. \\
&\quad \left. - (f_t - 1) \sin(\alpha_{t3}^- + \beta_{ST_{k2}}) \sin \alpha_{k1}^- \right] \\
UT_{k1} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (UT_{k1}^* + T_{k1} U^*) = 4e^4 \frac{su}{t^2} \left[(f_t + 1) \sin(\alpha_{t2}^+ - \beta_{UT_{k1}}) \sin \alpha_{k2}^+ \right. \\
&\quad \left. - (f_t - 1) \sin(\alpha_{t2}^- + \beta_{UT_{k1}}) \sin \alpha_{k2}^- \right] \\
T_q T_{k1} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (T_q T_{k1}^* + T_{k1} T_q^*) = 0 \\
T_q T_{k2} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (T_q T_{k2}^* + T_{k2} T_q^*) = 0 \\
T_{k1} T_{k2} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (T_{k1} T_{k2}^* + T_{k2} T_{k1}^*) = -2e^4 \frac{su}{t^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[(f_t + 1)^2 \cos(\alpha_{t2}^+ - \alpha_{t3}^+ + 2\beta_{k12}) \sin \alpha_{k1}^+ \sin \alpha_{k2}^+ \right. \\
& \quad + (f_t - 1)^2 \cos(\alpha_{t2}^- - \alpha_{t3}^- - 2\beta_{k12}) \sin \alpha_{k1}^- \sin \alpha_{k2}^- \\
& \quad + (f_t^2 - 1) \cos(\alpha_{t2}^+ + \alpha_{t3}^- + 2\beta_{k12}) \sin \alpha_{k1}^- \sin \alpha_{k2}^+ \\
& \quad \left. + (f_t^2 - 1) \cos(\alpha_{t2}^- + \alpha_{t3}^+ - 2\beta_{k12}) \sin \alpha_{k1}^+ \sin \alpha_{k2}^- \right] \\
T_q^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} T_q T_q^* = 0 \\
T_{k1}^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} T_{k1} T_{k1}^* = -e^4 \frac{su}{t^2} \left[(f_t + 1)^2 \sin^2 \alpha_{k2}^+ + (f_t - 1)^2 \sin^2 \alpha_{k2}^- \right. \\
& \quad \left. + 2(f_t^2 - 1) (\cos^2 \alpha_{t2}^+ - \sin^2 \alpha_{t2}^+) \sin \alpha_{k2}^- \sin \alpha_{k2}^+ \right] \\
T_{k2}^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} T_{k2} T_{k2}^* = -e^4 \frac{su}{t^2} \left[(f_t + 1)^2 \sin^2 \alpha_{k1}^+ + (f_t - 1)^2 \sin^2 \alpha_{k1}^- \right. \\
& \quad \left. + 2(f_t^2 - 1) (\cos^2 \alpha_{t3}^+ - \sin^2 \alpha_{t3}^+) \sin \alpha_{k1}^- \sin \alpha_{k1}^+ \right].
\end{aligned}$$

Anhang B

Compton-Streuung mit Vertauschung

An dieser Stelle sollen nun die Änderungen gezeigt werden, die sich für den Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung ergeben, wenn die Ableitungskopplungen mit dem Zeitordnungsoperator vertauscht werden (siehe Abschnitt 3.3).

Wenn man nun die Ableitungskopplungen mit dem Zeitordnungsoperator vertauscht, ändern sich alle Summanden, die den Term P^μ bzw. T_q beinhalten (siehe Abschnitt 4.3). P^μ hat bei Vertauschung der Ableitungskopplung entsprechend Abschnitt 3.3, folgende Form

$$P^\mu = -\lambda_{q_t}^\mu \cdot e^{-\frac{i}{2} \lambda_{q_t} \theta (k_1 - k_2)} \sin \left(\frac{k_1 \theta k_2}{2} \right) .$$

Nach der Summation über λ , erhält man

$$P^\mu = (E_{\vec{q}_t} [f_t \cos \alpha_{t1}^0 + i \sin \alpha_{t1}^0], \vec{q}_t [\cos \alpha_{t1}^0 + i f_t \sin \alpha_{t1}^0])^\mu \sin \left(\frac{k_1 \theta k_2}{2} \right) ,$$

wobei alle Abkürzungen denen in Abschnitt 4.3 entsprechen. Es ändern sich damit folgende zwei Summanden

$$\begin{aligned} T_q &= 2i e^2 \bar{u}(p_2) \gamma_\nu u(p_1) \epsilon_\rho(k_1) \epsilon_\sigma^*(k_2) e^{-\frac{i}{2} p_1 \theta p_2} \frac{1}{q_t^2 + i \epsilon} \\ &\quad (g^{\sigma\nu} l^\rho - g^{\nu\rho} l^\sigma) \sin \left(\frac{k_1 \theta k_2}{2} \right) e^{i \alpha_{t1}^3} \\ G &= 2e^2 \bar{u}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) e^{-\frac{i}{2} [p_1 \theta p_2 + k_1 \theta k_2]} e^{i \alpha_{g1}^3} \sin \left(\frac{k_1 \theta k_2}{2} \right) \frac{1}{q_t^2 + i \epsilon} \\ &\quad (f_{g1} \cdot k_{1\mu} + (f_{g2} \cdot E_{\vec{q}_t}, f_{g1} \cdot \vec{q}_t)^\mu) , \end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$l^\mu = (E_{\vec{q}_t} [f_t \cos \alpha_{t1}^0 + i \sin \alpha_{t1}^0], \vec{q}_t [\cos \alpha_{t1}^0 + i f_t \sin \alpha_{t1}^0])^\mu .$$

Nach mühsamer und dementsprechend langer Rechnung erhält man für die Terme der quadrierten Amplitude folgende, gegenüber den Termen in Abschnitt A.1, geänderte Summanden

$$\begin{aligned}
ST_q &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (ST_q^* + T_q S^*) = -4e^4 \sin \beta_{k12} \frac{1}{st} [(t+u)p_1 + sp_2]^\mu \\
&\quad \left(\frac{E_{qt}}{\vec{q}_t} [(f_t+1) \sin(\alpha_{t1}^+ - \beta_{ST_l}) - (f_t-1) \sin(\alpha_{t1}^- + \beta_{ST_l})] \right)_\mu \\
UT_q &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (UT_q^* + T_q U^*) = 4e^4 \sin \beta_{k12} \frac{1}{ut} [(t+u)p_1 + sp_2]^\mu \\
&\quad \left(\frac{E_{qt}}{\vec{q}_t} [(f_t+1) \sin(\alpha_{t1}^+ - \beta_{UT_l}) - (f_t-1) \sin(\alpha_{t1}^- + \beta_{UT_l})] \right)_\mu \\
T_q T_{k1} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (T_q T_{k1}^* + T_{k1} T_q^*) = e^4 \sin \beta_{k12} \frac{1}{t^2} [up_1 - sp_2 + tk_1]^\mu \\
&\quad \left[\left(\frac{E_{qt}}{\vec{q}_t} \right)_\mu \cdot (f_t+1)^2 \cos(\alpha_{t1}^+ - \alpha_{t2}^+ - \beta_{k12}) \sin \alpha_{k2}^+ \right. \\
&\quad + \left(\frac{E_{qt}}{-\vec{q}_t} \right)_\mu \cdot (f_t-1)^2 \cos(\alpha_{t1}^- - \alpha_{t2}^- + \beta_{k12}) \sin \alpha_{k2}^- \\
&\quad + \left(\frac{E_{qt}}{\vec{q}_t} \right)_\mu \cdot (f_t^2-1) \cos(\alpha_{t1}^+ + \alpha_{t2}^- - \beta_{k12}) \sin \alpha_{k2}^- \\
&\quad \left. + \left(\frac{E_{qt}}{-\vec{q}_t} \right)_\mu \cdot (f_t^2-1) \cos(\alpha_{t1}^- + \alpha_{t2}^+ + \beta_{k12}) \sin \alpha_{k2}^+ \right] \\
T_l T_{k2} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} (T_l T_{k2}^* + T_{k2} T_l^*) = e^4 \sin \beta_{k12} \frac{1}{t^2} [up_1 - sp_2 + tk_1]^\mu \\
&\quad \left[\left(\frac{E_{qt}}{\vec{q}_t} \right)_\mu \cdot (f_t+1)^2 \cos(\alpha_{t1}^+ - \alpha_{t3}^+ - \beta_{k12}) \sin \alpha_{k1}^+ \right. \\
&\quad + \left(\frac{E_{qt}}{-\vec{q}_t} \right)_\mu \cdot (f_t-1)^2 \cos(\alpha_{t1}^- - \alpha_{t3}^- + \beta_{k12}) \sin \alpha_{k1}^- \\
&\quad + \left(\frac{E_{qt}}{\vec{q}_t} \right)_\mu \cdot (f_t^2-1) \cos(\alpha_{t1}^+ + \alpha_{t3}^- - \beta_{k12}) \sin \alpha_{k1}^- \\
&\quad \left. + \left(\frac{E_{qt}}{-\vec{q}_t} \right)_\mu \cdot (f_t^2-1) \cos(\alpha_{t1}^- + \alpha_{t3}^+ + \beta_{k12}) \sin \alpha_{k1}^+ \right] \\
T_l^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} T_l T_l^* = -16e^4 \sin^2 \beta_{k12} \frac{1}{t^2} [p_1^0 E_{qt} p_2^0 E_{qt} (f_t^2 \cos^2 \alpha_{t1}^0 + \sin^2 \alpha_{t1}^0) \\
&\quad + \vec{p}_1 \vec{q}_t \cdot \vec{p}_2 \vec{q}_t (\cos^2 \alpha_{t1}^0 + f_t^2 \sin^2 \alpha_{t1}^0) \\
&\quad - f_t (\vec{p}_1 \vec{q}_t \cdot p_2^0 E_{qt} + p_1^0 E_{qt} \cdot \vec{p}_2 \vec{q}_t) \\
&\quad + t \{ E_{qt}^2 (f_t^2 \cos^2 \alpha_{t1}^0 + \sin^2 \alpha_{t1}^0) - \vec{q}_t \vec{q}_t (\cos^2 \alpha_{t1}^0 + f_t^2 \sin^2 \alpha_{t1}^0) \}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^2 = \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins, Pol.}} GG^* = e^4 \frac{1}{t^2} & \\
& \left[-\frac{su}{2} \left\{ (f_t + 1)^2 \sin^2 (\alpha_{t5}^+ + \beta_{k12}) + (f_t - 1)^2 \sin^2 (\alpha_{t5}^- - \beta_{k12}) \right. \right. \\
& - 2(f_t^2 - 1) (\sin^2 \alpha_{t4}^0 - \cos^2 \alpha_{t4}^0) \sin (\alpha_{t5}^+ + \beta_{k12}) \sin (\alpha_{t5}^- - \beta_{k12}) \Big\} \\
& + 2p_1^0 E_{qt} p_2^0 E_{qt} \left\{ (f_t + 1)^2 \sin^2 (\alpha_{t5}^+ + \beta_{k12}) + (f_t - 1)^2 \sin^2 (\alpha_{t5}^- - \beta_{k12}) \right. \\
& + 2(f_t^2 - 1) (\sin^2 \alpha_{t4}^0 - \cos^2 \alpha_{t4}^0) \sin (\alpha_{t5}^+ + \beta_{k12}) \sin (\alpha_{t5}^- - \beta_{k12}) \Big\} \\
& + 2\vec{p}_1 \vec{q}_t \cdot \vec{p}_2 \vec{q}_t \left\{ (f_t + 1)^2 \sin^2 (\alpha_{t5}^+ + \beta_{k12}) + (f_t - 1)^2 \sin^2 (\alpha_{t5}^- - \beta_{k12}) \right. \\
& - 2(f_t^2 - 1) (\sin^2 \alpha_{t4}^0 - \cos^2 \alpha_{t4}^0) \sin (\alpha_{t5}^+ + \beta_{k12}) \sin (\alpha_{t5}^- - \beta_{k12}) \Big\} \\
& - 2(p_1^0 E_{qt} \cdot \vec{p}_2 \vec{q}_t + \vec{p}_1 \vec{q}_t \cdot p_2^0 E_{qt}) \\
& \left. \left\{ (f_t + 1)^2 \sin^2 (\alpha_{t5}^+ + \beta_{k12}) - (f_t - 1)^2 \sin^2 (\alpha_{t5}^- - \beta_{k12}) \right\} \right. \\
& + (sp_2 - up_1 + tk_1)^\mu \cdot \left\{ \left(\begin{array}{c} E_{qt} \\ \vec{q}_t \end{array} \right)_\mu \cdot (f_t + 1)^2 \sin^2 (\alpha_{t5}^+ + \beta_{k12}) \right. \\
& + \left(\begin{array}{c} -E_{qt} \\ \vec{q}_t \end{array} \right)_\mu \cdot (f_t - 1)^2 \sin^2 (\alpha_{t5}^- - \beta_{k12}) \\
& \left. \left. - \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vec{q}_t \end{array} \right)_\mu \cdot 2(f_t^2 - 1) (\sin^2 \alpha_{t4}^0 - \cos^2 \alpha_{t4}^0) \right\} \right. \\
& + \frac{t}{2} \left\{ E_{qt}^2 ((f_t + 1)^2 \sin^2 (\alpha_{t5}^+ + \beta_{k12}) + (f_t - 1)^2 \sin^2 (\alpha_{t5}^- - \beta_{k12}) \right. \\
& + 2(f_t^2 - 1) (\sin^2 \alpha_{t4}^0 - \cos^2 \alpha_{t4}^0) \sin (\alpha_{t5}^+ + \beta_{k12}) \sin (\alpha_{t5}^- - \beta_{k12})) \\
& - \vec{q}_t \vec{q}_t ((f_t + 1)^2 \sin^2 (\alpha_{t5}^+ + \beta_{k12}) + (f_t - 1)^2 \sin^2 (\alpha_{t5}^- - \beta_{k12}) \\
& \left. \left. - 2(f_t^2 - 1) (\sin^2 \alpha_{t4}^0 - \cos^2 \alpha_{t4}^0) \sin (\alpha_{t5}^+ + \beta_{k12}) \sin (\alpha_{t5}^- - \beta_{k12})) \right\} \right] .
\end{aligned}$$

Wie man sieht, sind die Terme komplex und nicht besonders aussagekräftig.

Literaturverzeichnis

- [1] H. S. Snyder, *Quantized spacetime*, Phys. Rev. **71** (1947) 38.
- [2] C. N. Yang, *On quantized spacetime*, Phys. Rev. **72** (1947) 874.
- [3] E. Witten and N. Seiberg, *String theory and noncommutative geometry*, JHEP **9909** (1999) 032 [arXiv:hep-th/9908142].
- [4] T. Filk, *Divergences in a field theory on quantum space*, Phys. Lett. **B376** (1996) 53.
- [5] S. Fidanza, *Towards an explicit expression of the Seiberg-Witten map at all orders*, JHEP **0206** (2002) 016 [arXiv:hep-th/0112027].
- [6] X. Calmet, B. Jurco, P. Schupp, J. Wess and M. Wohlgenannt *The standard model on non-commutative space-time*, Eur. Phys. J. C **23** (2002) 363 [arXiv:hep-ph/0211425].
- [7] H. Bozkaya, P. Fischer, H. Grosse, M. Pitschmann, V. Putz, M. Schweda and R. Wulkenhaar, *Space/time noncommutative field theories and causality*, [arXiv:hep-ph/0209253].
- [8] M. Peskin and D. Schroeder *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995, ISBN: 0-201-50397-2.
- [9] T. Ohl, R. Rückl and J. Zeiner, *Unitarity of Gauge Theories with Time-Like Noncommutativity: The Violation of Ward Identities in Time Ordered Perturbation Theory*.
- [10] I. Hinchliffe and N. Kersting, *Review of the Phenomenology of Noncommutative Geometry* [arXiv:hep-ph/0205040].
- [11] J. Gomis and T. Mehen, *Space-time noncommutative field theories and unitarity*, Nucl. Phys. B **591** (2000) 265 [arXiv:hep-th/0005129].
- [12] R. E. Cutkosky, *Singularities and Discontinuities of Feynman Amplitudes*, J. Math. Phys. **1** (1960) 429
- [13] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen and G. Piacitelli, *On the unitarity problem in space-time noncommutative theories*, Phys. Lett. B **533** (2002) 178 [arXiv:hep-th/0201222].

- [14] Y. Liao and K. Sibold, *Time-ordered perturbation theory on noncommutative spacetime: Basic rules*, Eur. Phys. J. C **25** (2002) 469 [arXiv:hep-th/0205269].
- [15] Y. Liao and K. Sibold, *Time-ordered perturbation theory on noncommutative spacetime. II. Unitarity*, Eur. Phys. J. C **25** (2002) 479 [arXiv:hep-th/0206011].
- [16] Y. Liao and C. Dehne, *Some phenomenological consequences of the time-ordered perturbation theory of QED on noncommutative spacetime*, [arXiv:hep-ph/0211425].
- [17] M. Hayakawa, *Perturbative analysis on infrared aspects of noncommutative QED on R^4* , Phys. Lett. B **478** (2001) 394 [arXiv:hep-th/9912094].
- [18] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, *The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields*, Commun. Math. Phys. **172** (1995) 187 [arXiv:hep-th/0303037].
- [19] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw Hill College Div, 1980, ASIN: 0070320713

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Insbesondere gilt mein Dank:

- PD. Dr. Thorsten Ohl, der mich unzählige Male bei der Entstehung dieser Arbeit sehr kompetent unterstützt hat. Ohne ihn wäre diese Arbeit in der hier vorliegenden Form nicht möglich gewesen.
- Prof. Dr. Reinhold Rückl, der mich durch seine Vorlesungen „Quantenmechanik III“ und „Theoretische Teilchenphysik“ in das Gebiet der theoretischen Elementarteilchenphysik eingeführt und mir die Bearbeitung dieses faszinierenden Themengebiets ermöglicht hat.
- Ana Alboteanu und PD. Dr. Thorsten Ohl, die diese Arbeit sorgfältig Korrektur gelesen haben.
- Ana Alboteanu, Alexander Mück, Christian Schwinn und Martin Weidner für die vielen hilfreichen Diskussionen und die fachliche Unterstützung.
- Meinen Eltern, die mich in allen Belangen ausnahmslos unterstützt haben.
- Jesus Christus, dem ich alles zu verdanken habe.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Würzburg, den 28. August 2003

Jörg Zeiner