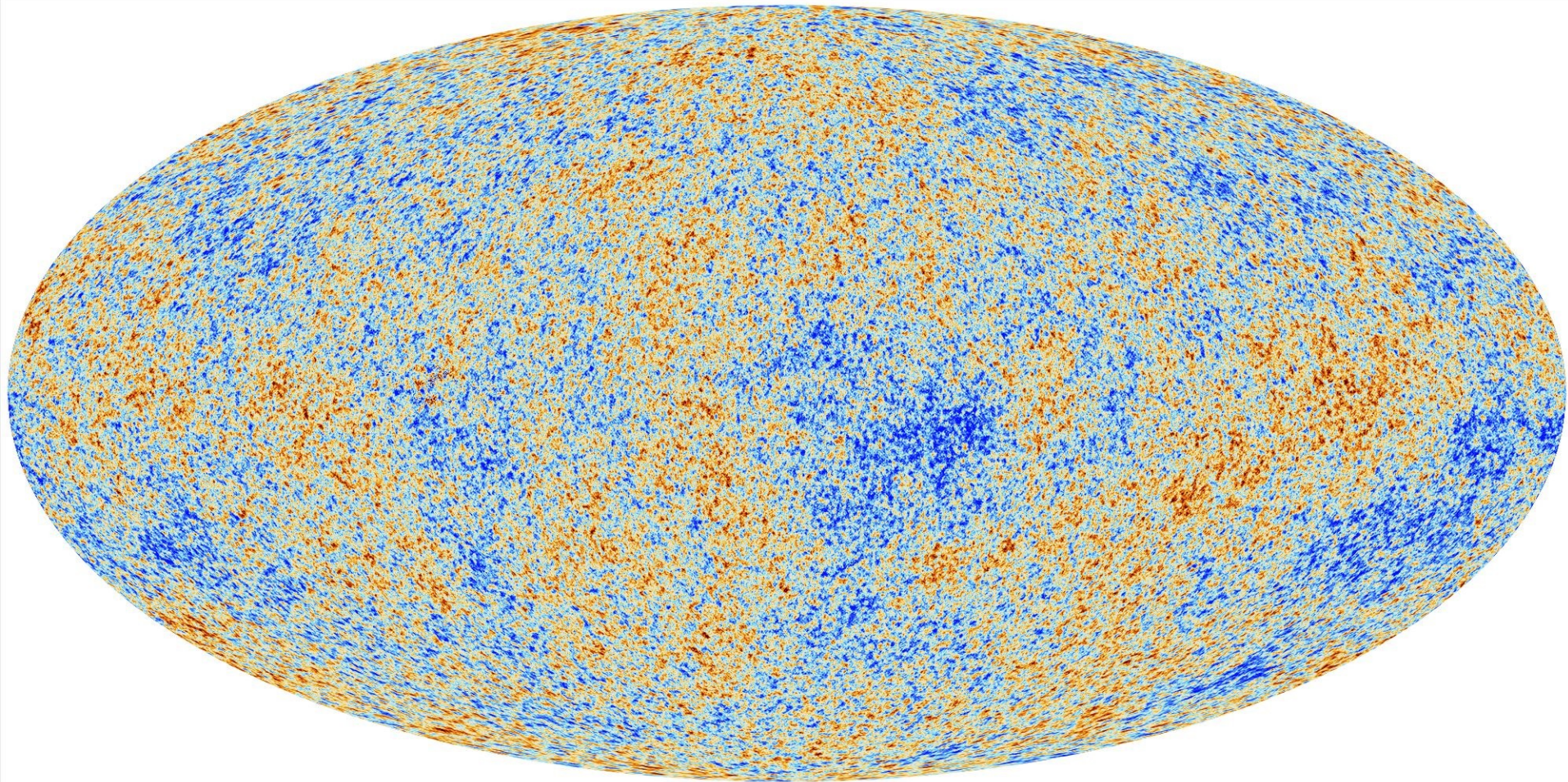


Von der kosmischen Hintergrundstrahlung zur Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation

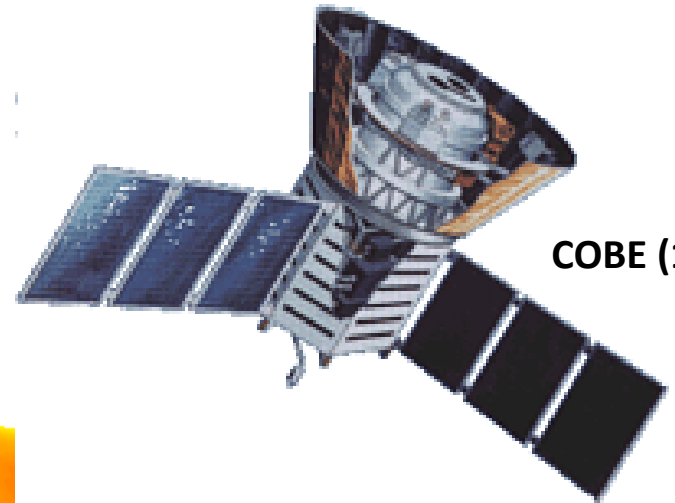
eine Einführung in die Quantenmechanik

Die kosmische Hintergrundstrahlung

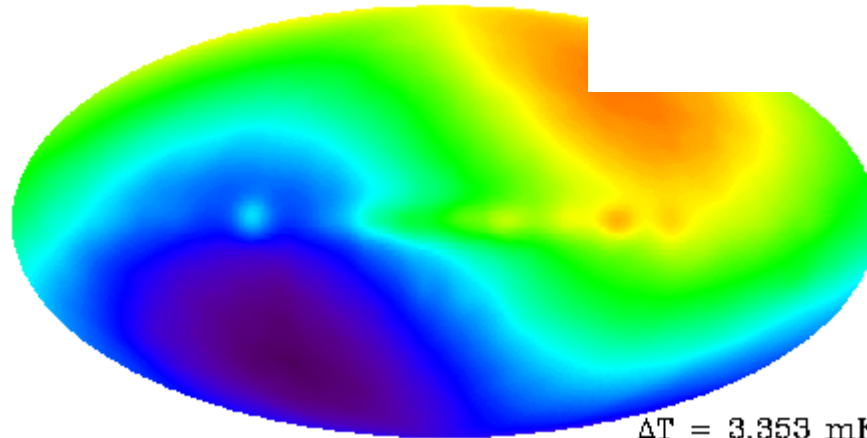




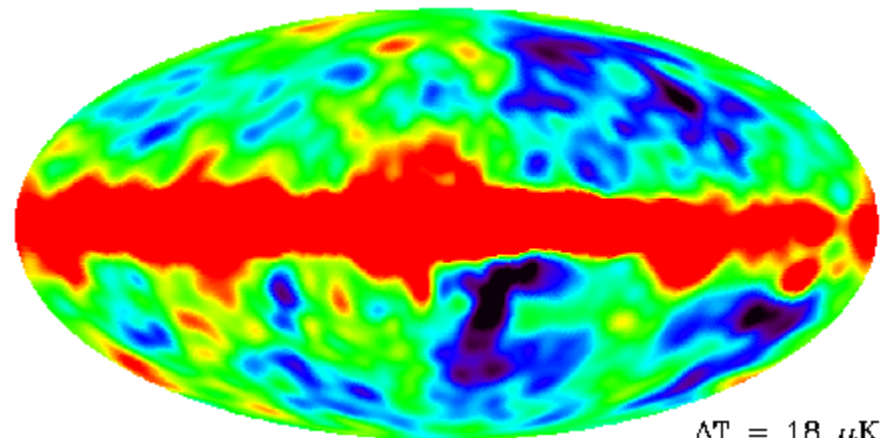
$T = 2.728 \text{ K}$



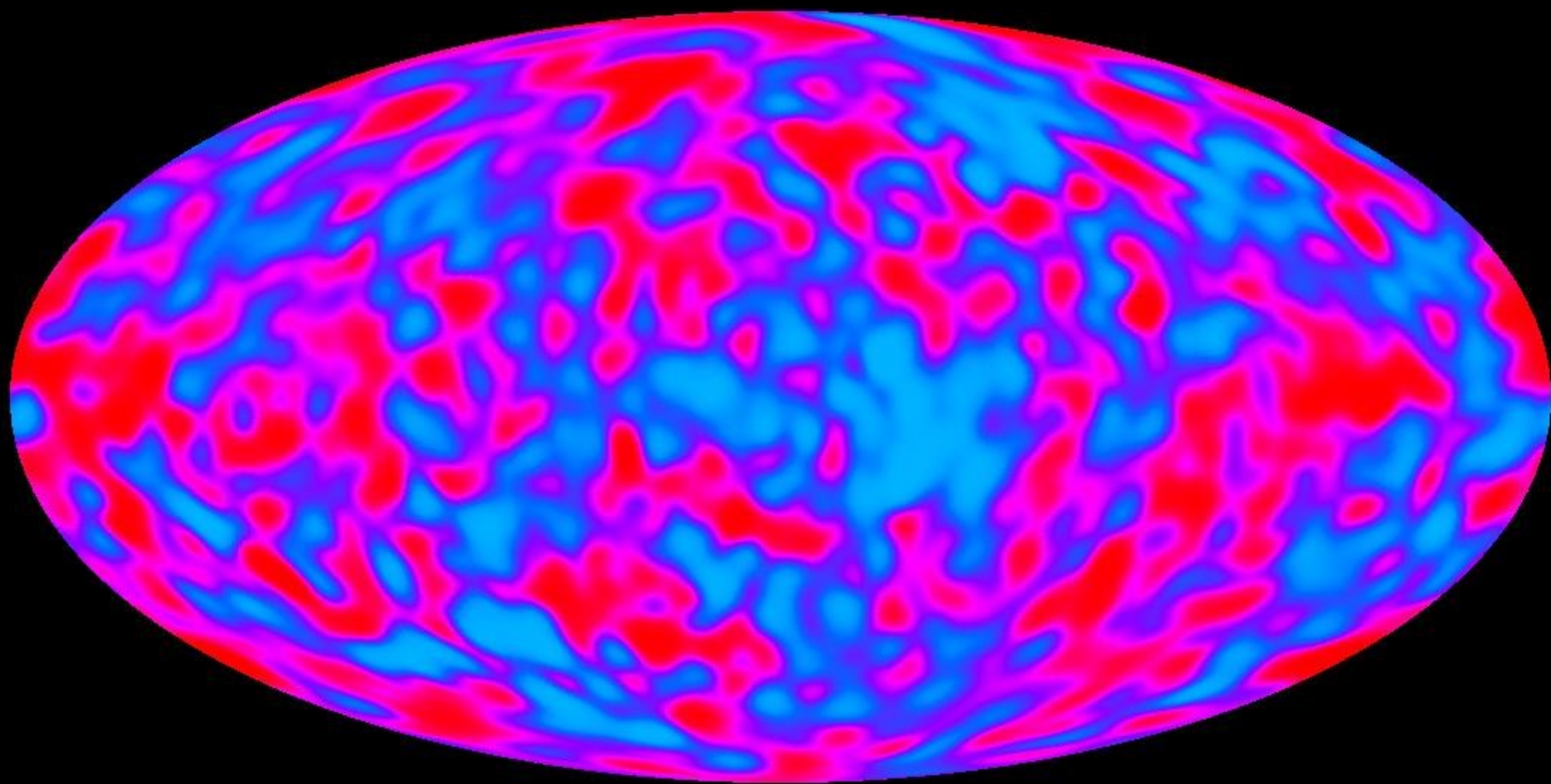
COBE (1989)

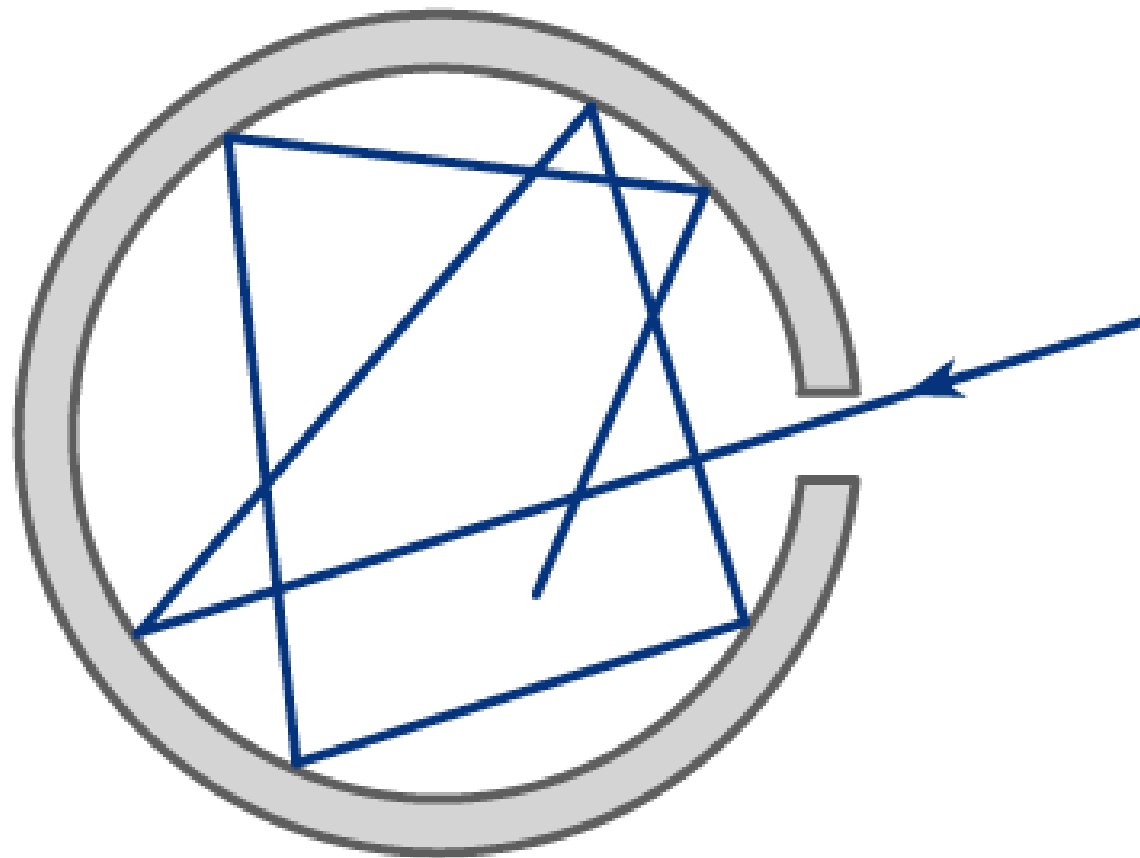


$\Delta T = 3.353 \text{ mK}$

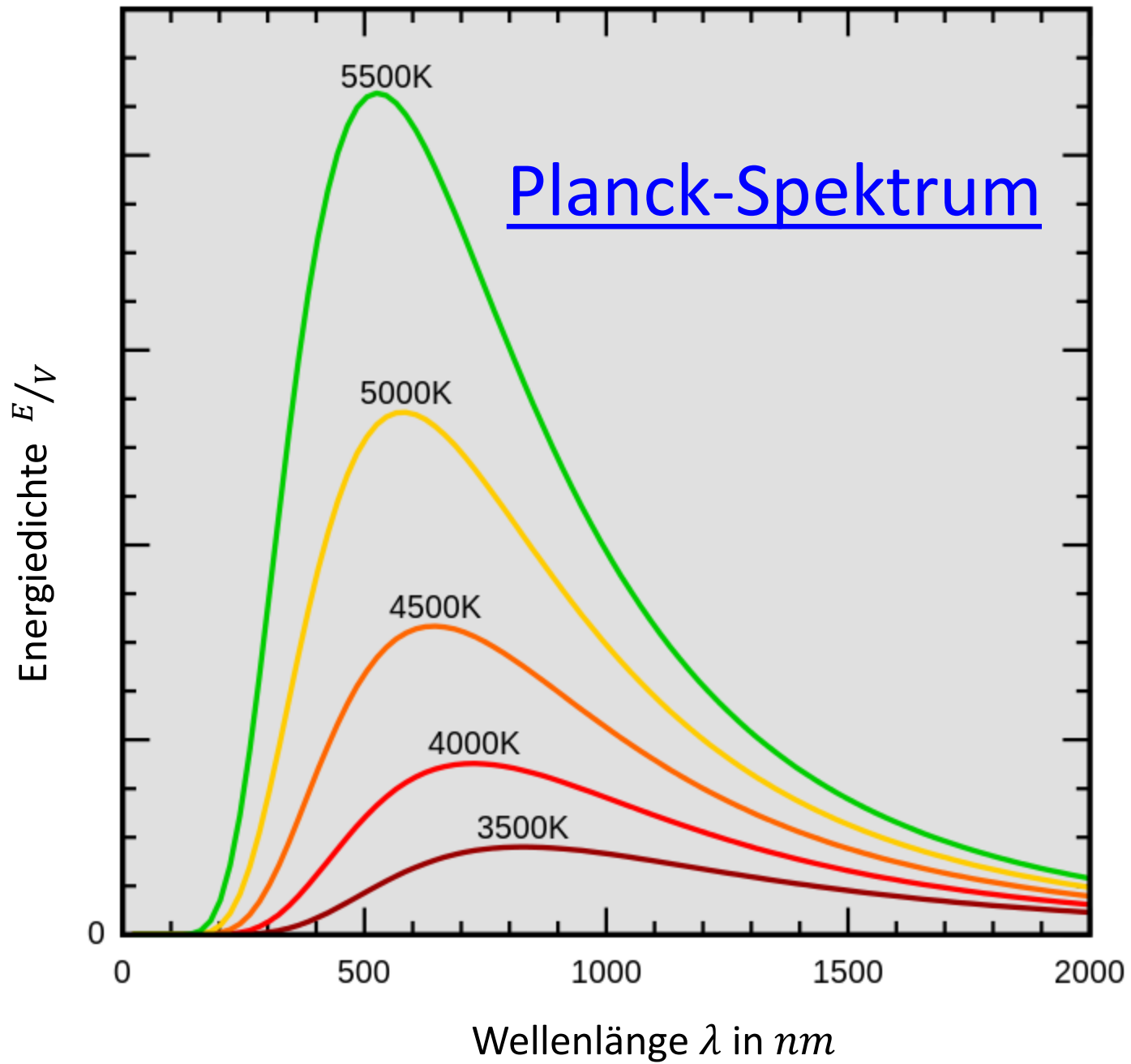


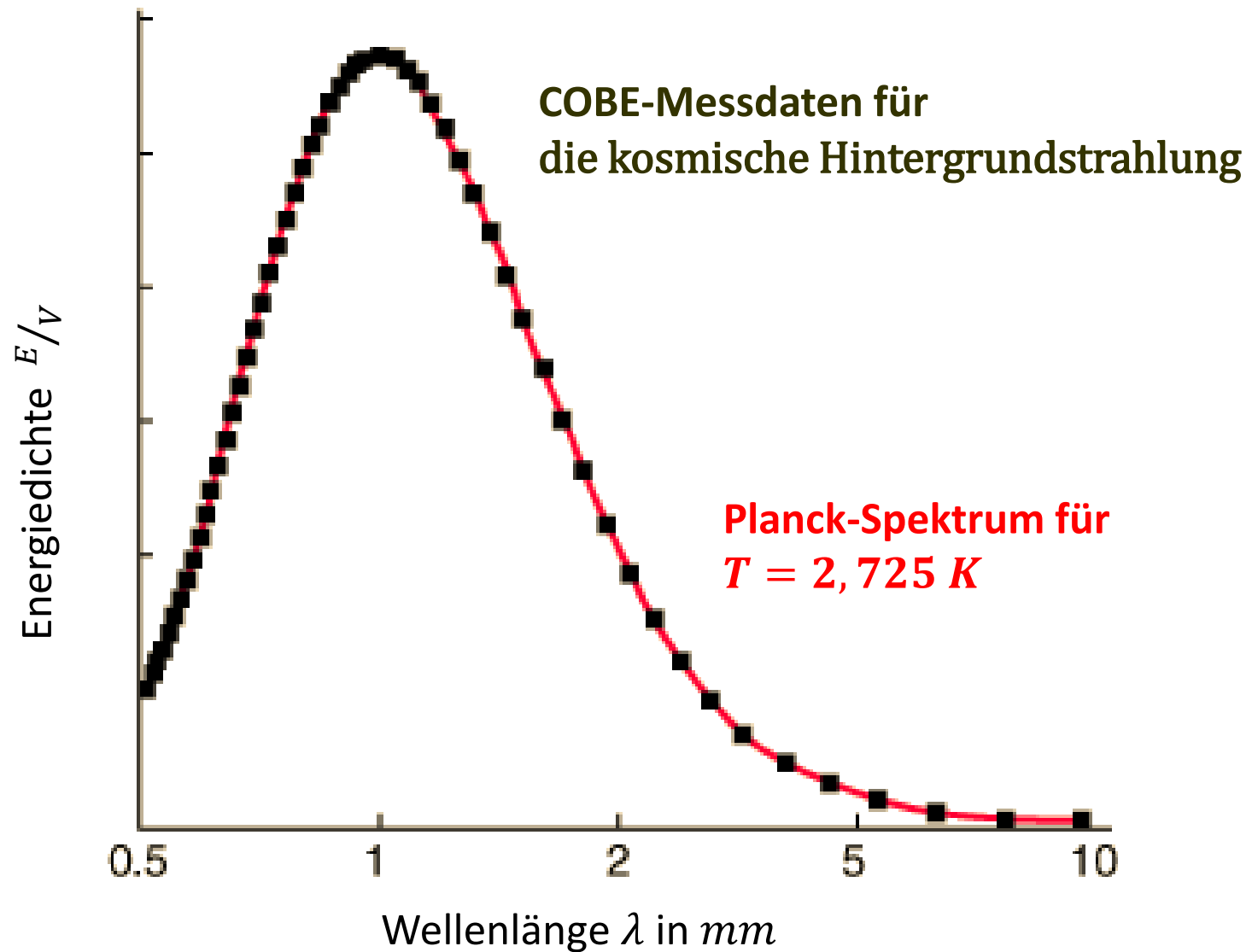
$\Delta T = 18 \mu\text{K}$

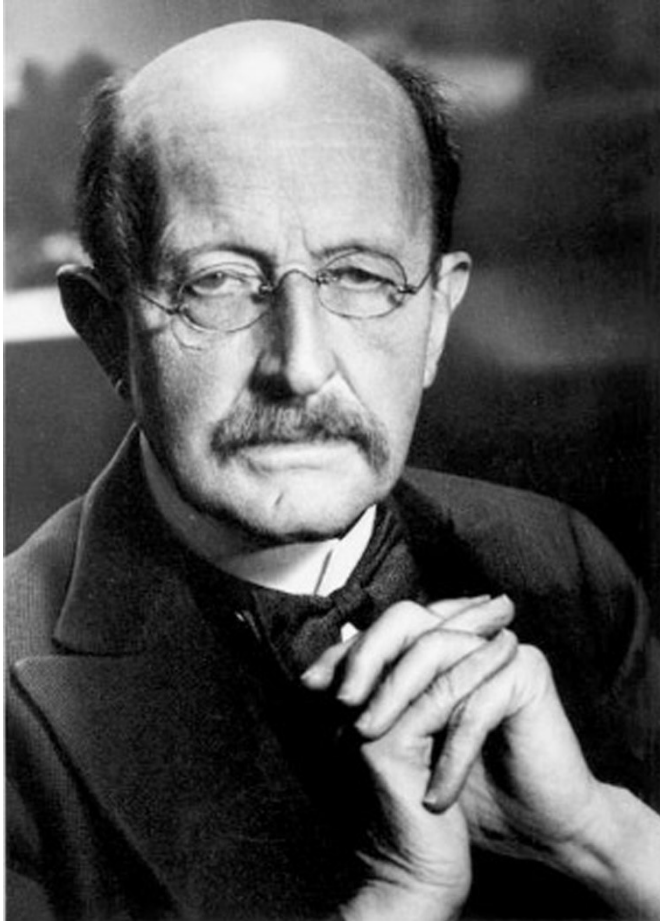




Hohlraumstrahler







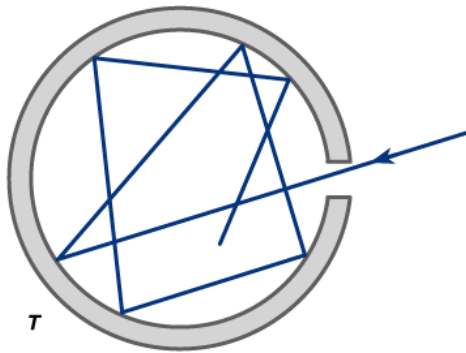
Max Planck

(1858 – 1947)

Nobelpreis 1918

Die Hohlraumstrahlung: Geburt der Quantenmechanik

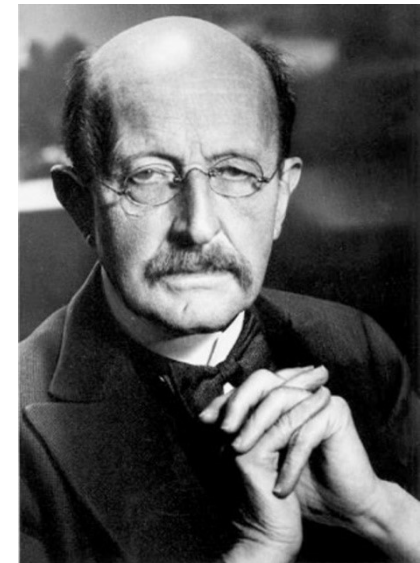
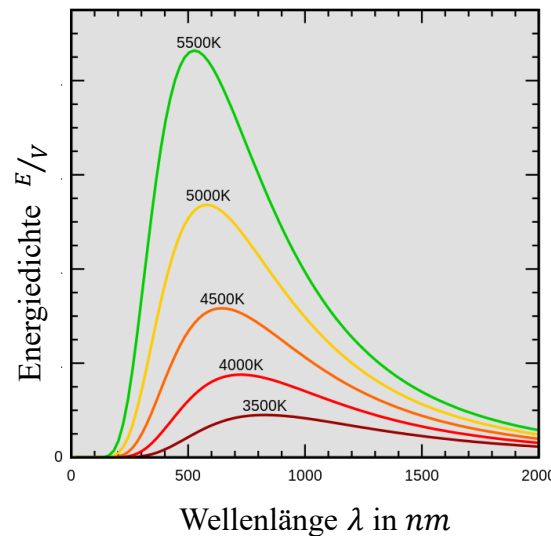
Energiequantisierung der Hohlraumstrahlung



Hohlraumstrahler

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

Plancksches Wirkungsquantum h



Max Planck
1900

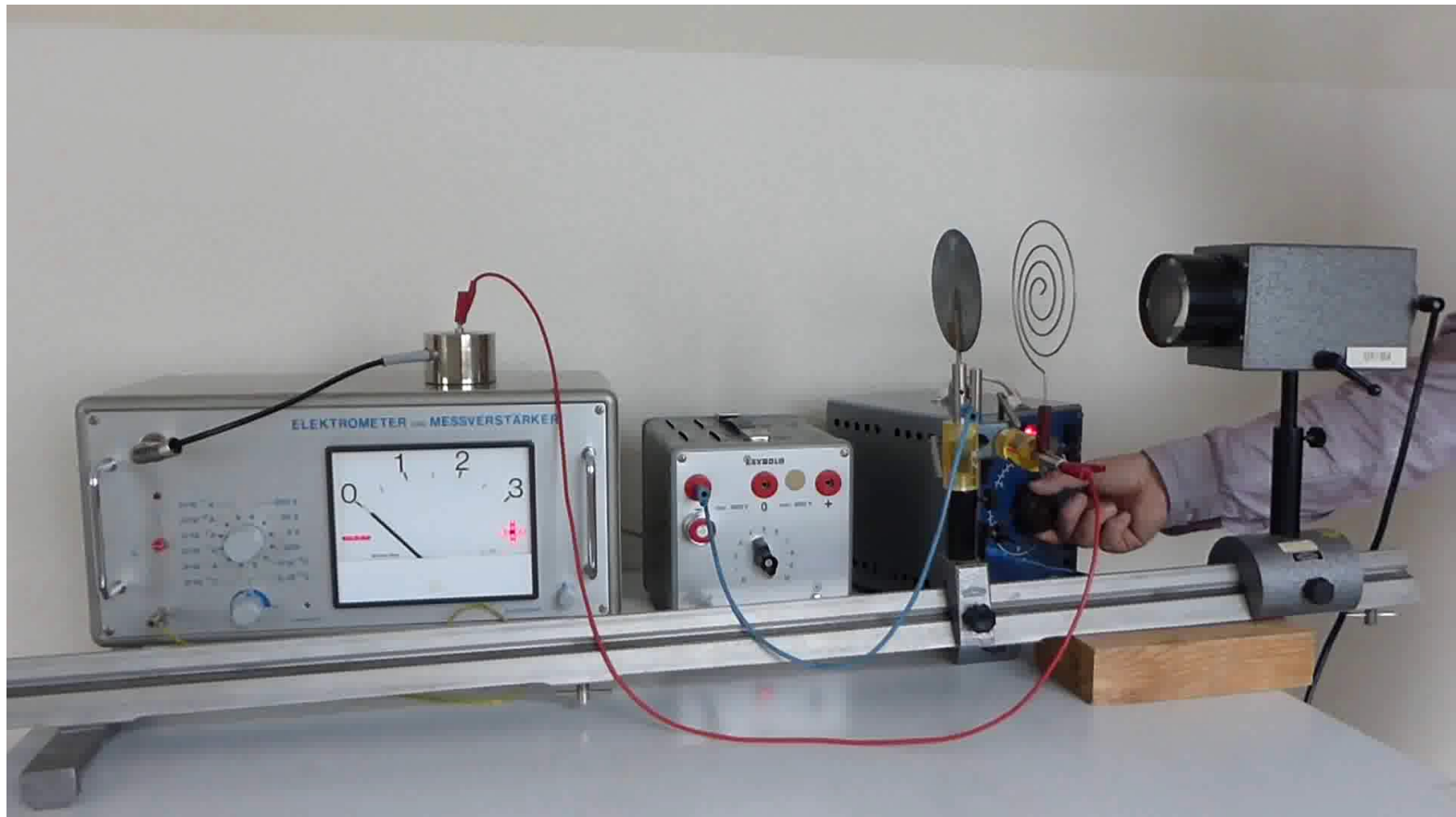
Experiment: Lichtelektrischer Effekt

Photostrom bei Bestrahlung einer Zinkplatte mit einer Hg-Dampf Lampe



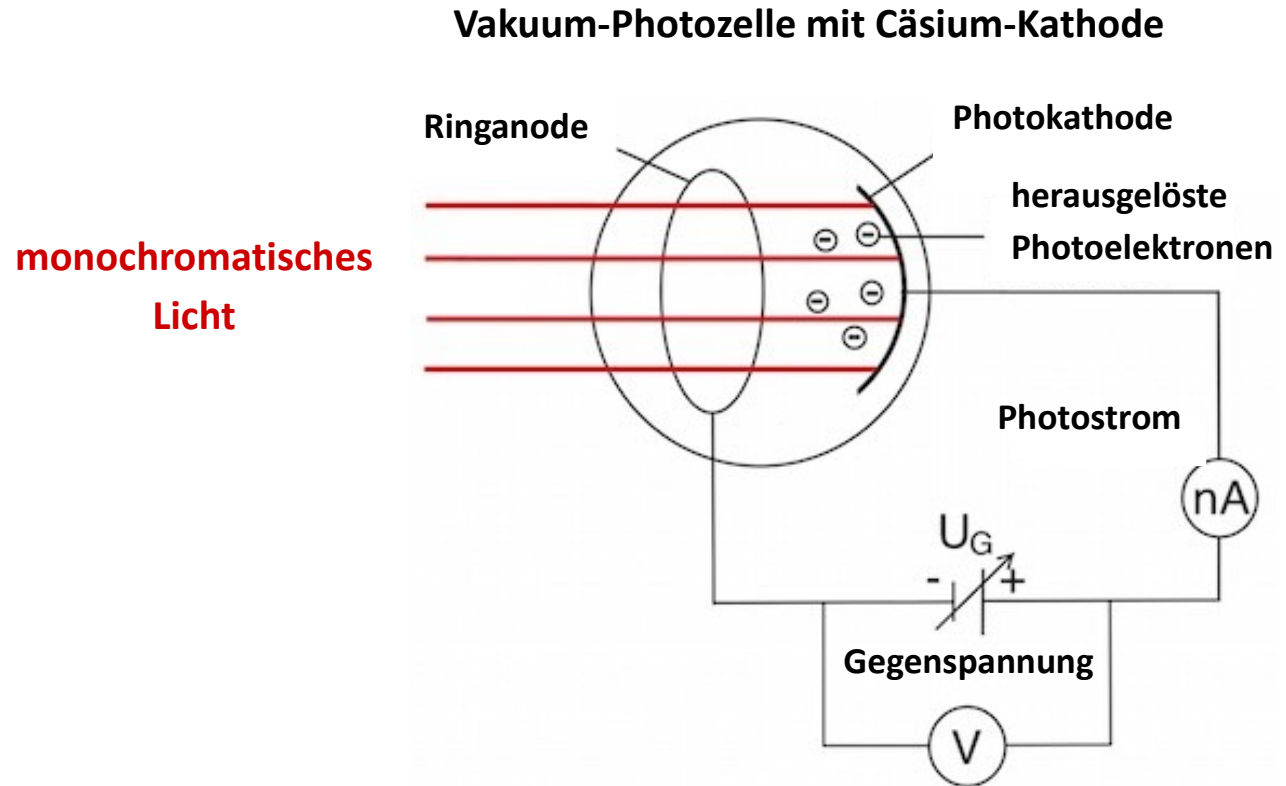
➤ sofortiges Einsetzen des Photostroms

Experiment: kein Photostrom bei Bestrahlung einer Zinkplatte mit weißem Licht

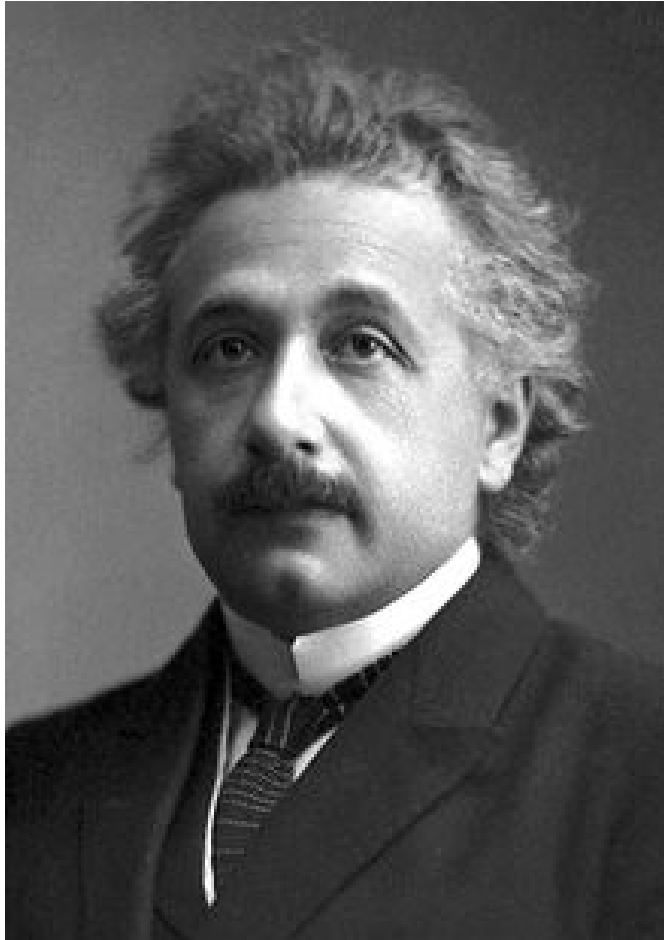


- Photostrom nur bei Bestrahlung mit Licht ausreichend kleiner Wellenlänge

Experiment: Gegenfeldmethode



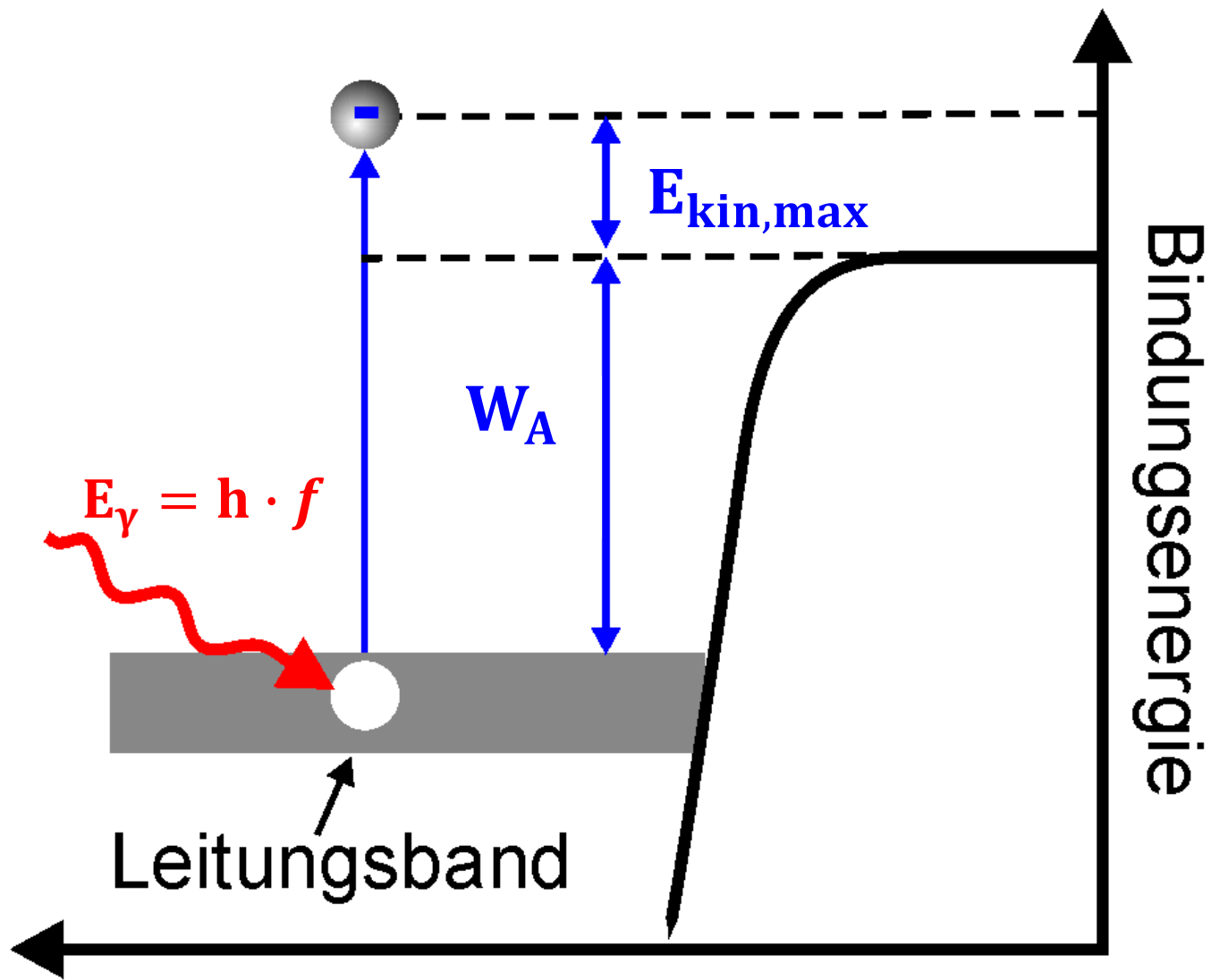
- Unabhängig von der Intensität der Bestrahlung verschwindet der Photostrom bei der gleichen Gegenspannung.

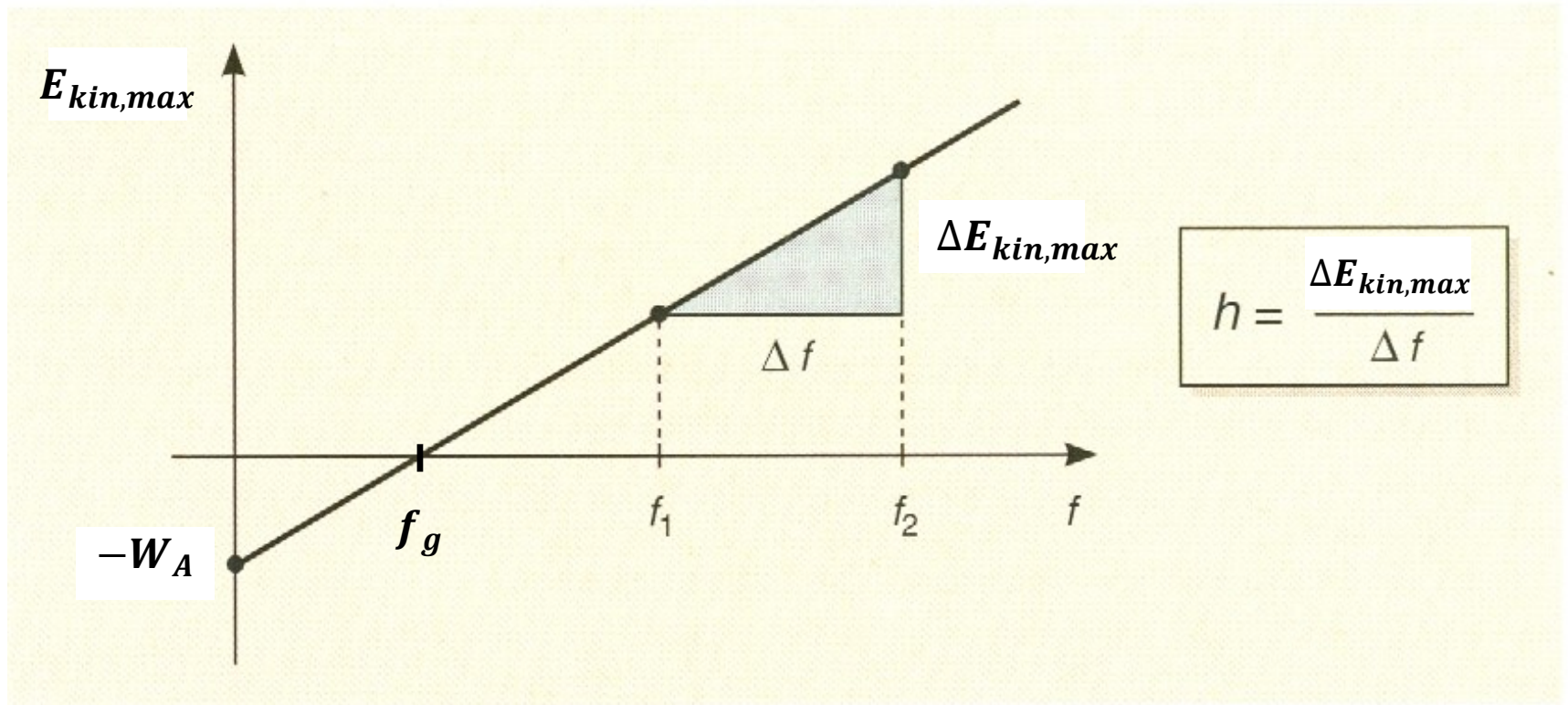


Albert Einstein

(1879 – 1955)

Nobelpreis 1921



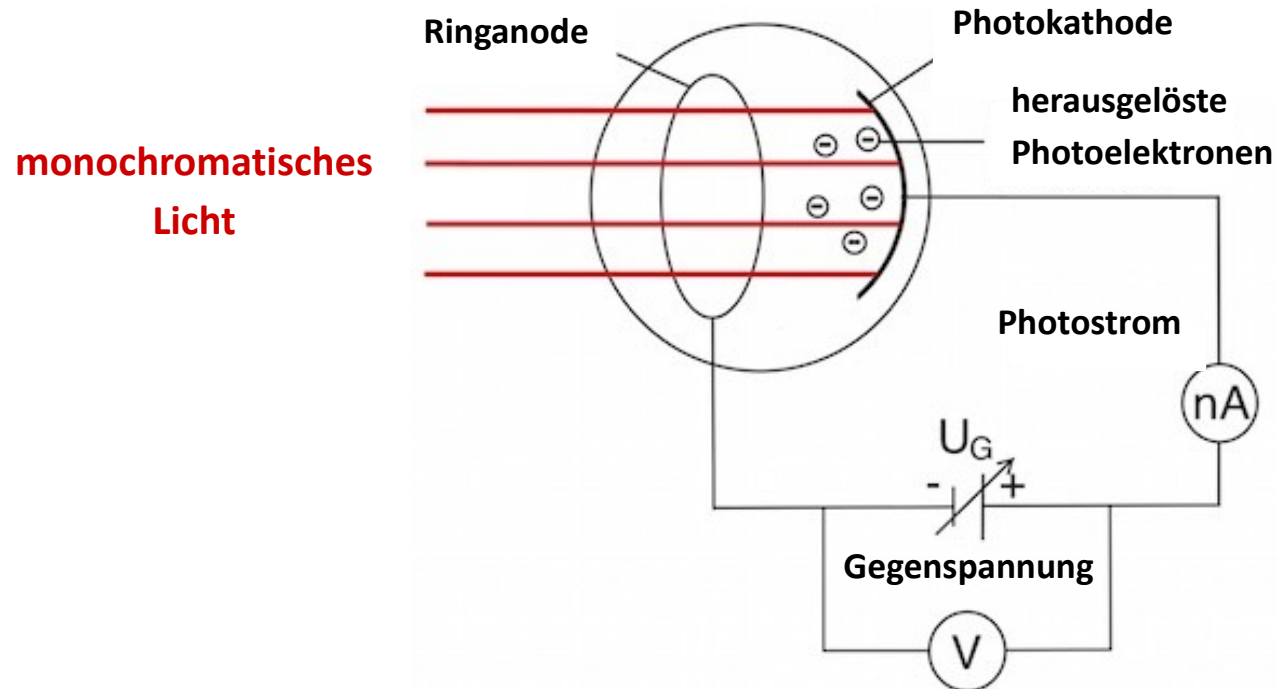


Einstein-Gleichung:

$$E_{kin,max} = h \cdot f - W_A$$

Experiment: Gegenfeldmethode

Vakuum-Photozelle mit Cäsium-Kathode



Farbe	rot	gelb	grün	türkis	blau
Wellenlänge λ in nm	611	588	525	505	472
Frequenz in 10^{14} Hz	4,91	5,10	5,71	5,94	6,36

Experiment: Gegenfeldmethode zum Lichtelektrischen Effekt



Von der kosmischen Hintergrundstrahlung zur Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation

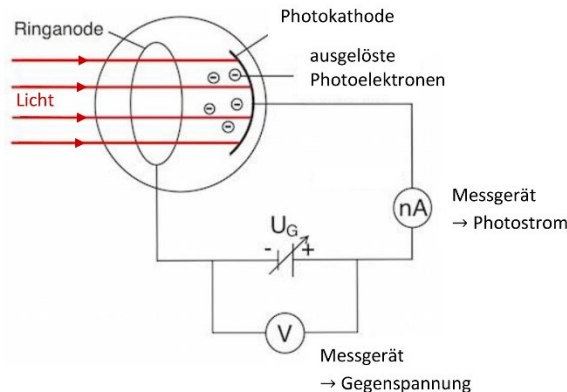
Arbeitsblatt 1: Der Lichtelektrische Effekt

Einsteins Erklärung für den Lichtelektrischen Effekt:

Ein Photon der Energie $E_\gamma = h \cdot f$ wird von einem Elektron absorbiert und gibt dabei seine Energie an das Elektron ab. Wenn die Energie des Photons größer war als die Ablösearbeit W_A , kann das Elektron die Metallplatte verlassen und hat dann eine maximale Energie

$$E_{kin,max} = E_\gamma - W_A = h \cdot f - W_A \quad (\text{Einstein-Gleichung}).$$

Wir messen die maximale kinetische Energie der Photoelektronen in Abhängigkeit von der Wellenlänge des Lichts, das den Lichtelektrischen Effekt auslöst:



Eine Vakuum-Photozelle mit Cäsium-Kathode wird mit dem Licht monochromatischer Leuchtdioden unterschiedlicher Wellenlängen bestrahlt. Aus der Cäsium-Kathode kann man bereits mit Licht im sichtbaren Wellenlängenbereich Photoelektronen auslösen. Ihre Bewegungsenergie, erlaubt es den Photoelektronen, die Ringanode zu erreichen und sie fließen über einen Messverstärker ab. Man misst einen Photostrom. Die Bewegungsenergie $E_{kin,max}$ der Photoelektronen, die nicht einen Teil ihrer Energie durch Stöße verloren haben, bevor sie an der Ringelektrode ankommen, kann man messen, indem man zwischen Photokathode und Ringanode eine variable Gegenspannung U_G legt. U_G wird so lange erhöht, bis der Photostrom zum Erliegen kommt. Dann können auch die Photoelektronen mit der Bewegungsenergie $E_{kin,max}$ die Ringanode gerade nicht mehr erreichen und es gilt: $E_{kin,max} = e \cdot U_G$.

Diese Methode zur Messung von $E_{kin,max}$ der Photoelektronen heißt **Gegenfeldmethode**.

Aufgaben:

Das Experiment wird mit folgenden monochromatischen Leuchtdioden durchgeführt:

Farbe	rot	gelb	grün	türkis	blau
Frequenz f in 10^{14} Hz	4,91	5,10	5,71	5,94	6,36
Gegenspannung U_G in V					

- Wir führen das Experiment gemeinsam durch.
Trage in die Tabelle die Gegenspannungen U_G an, bei denen der Photostrom jeweils verschwindet.
- Trage in ein f - $E_{kin,max}$ -Diagramm deine fünf Messpunkte ein und mache dir klar, dass diese Messpunkte näherungsweise auf einer Geraden liegen! Zeichne diese Gerade so lang, dass sie die Hochwertachse schneidet.
- Welche physikalische Bedeutung haben die Steigung der Geraden und ihre Schnittpunkte mit den Achsen? Mache dir den Zusammenhang zwischen der Geraden und der Einstein-Gleichung klar!
- Ermittle aus deinem Diagramm Näherungswerte für das Planck'sche Wirkungsquantum h , für die Ablösearbeit W_A von Cäsium und für die Grenzwellenlänge λ_g , unterhalb der die Wellenlänge von Licht liegen muss, damit das Licht bei einer Cäsium-Kathode einen Photostrom bewirken kann.
- Das **sofortige Einsetzen des Photostroms** lässt sich mit der klassischen Vorstellung von Licht als elektromagnetische Welle nicht verstehen.

Nach der klassischen Vorstellung müsste ein Atom im Metall so lange mit Licht bestrahlt werden, bis es die Energie „angesammelt“ hat, die der Ablösearbeit W_A entspricht.

Doch wie viel Zeit würde, wenn man Licht ausschließlich als elektromagnetische Welle betrachtet, vergehen, bis Elektronen aus einer Cäsium-Kathode, die mit einer grünen Leuchtdiode der Wellenlänge $\lambda = 525 \text{ nm}$ der Intensität $10 \frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$ bestrahlt wird, abgelöst werden?

Hinweis: Schätze die Gesamtenergie, die während der gesuchten Zeit auf ein Cäsium-Atom fällt, durch die Strahlungsenergie ab, die auf eine Kreisfläche mit dem typischen Atomradius von 10^{-10} m fällt!

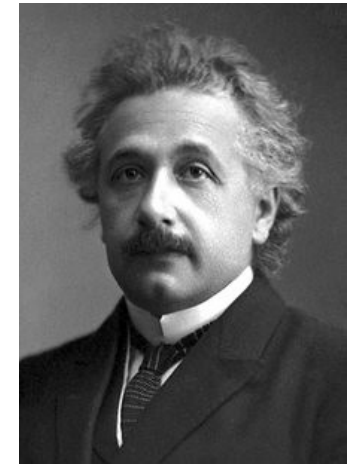
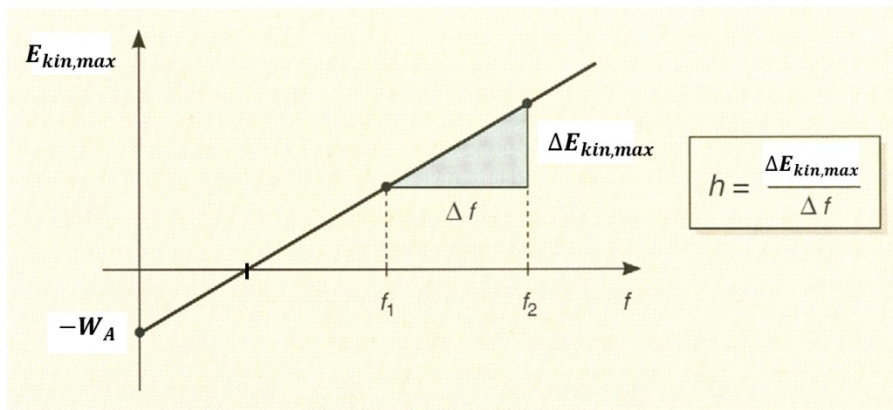
Der Lichtelektrische Effekt

Lichtquantenhypothese

- Lichtquanten (Photonen)

- Energie eines Photons: $E_\gamma = h \cdot \frac{c}{\lambda} = h \cdot f$

- Einstein-Gleichung: $E_{kin,max} = h \cdot f - W_A$



Albert Einstein
1905

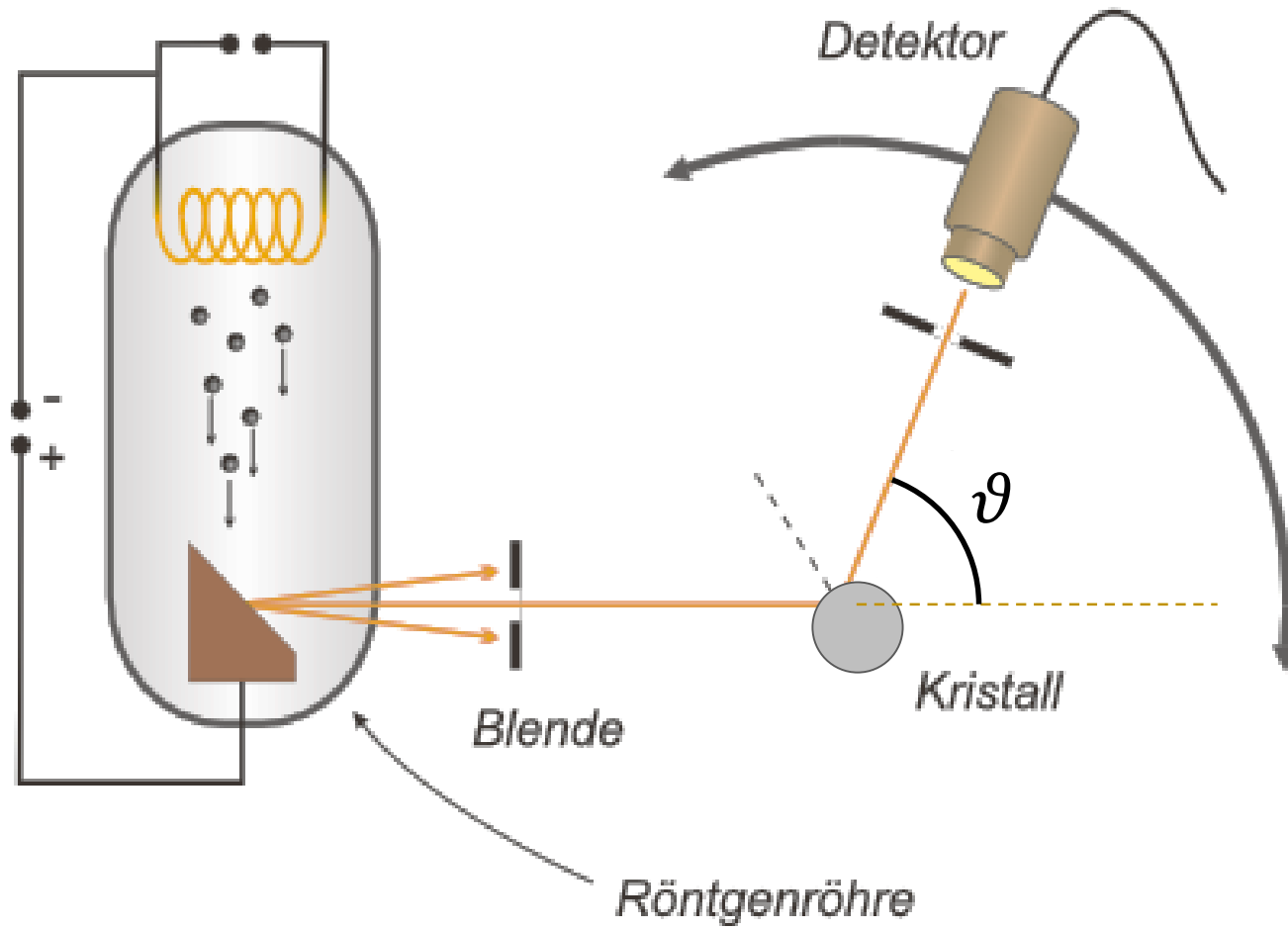


Arthur Compton

(1892 – 1962)

Nobelpreis 1927

Der Compton-Effekt



Der Compton-Effekt

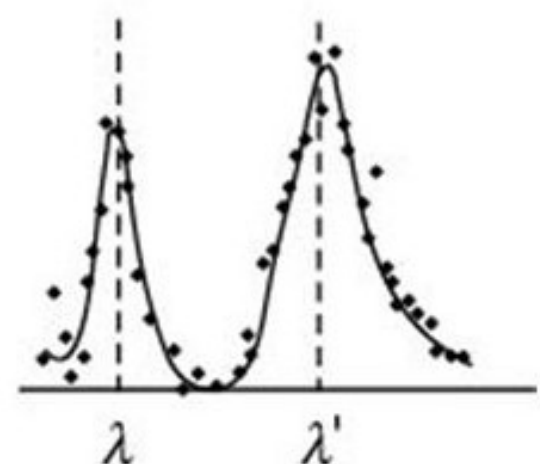
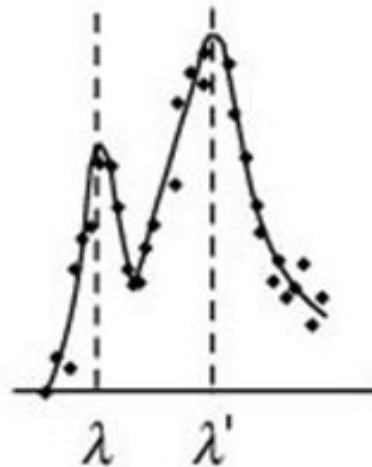
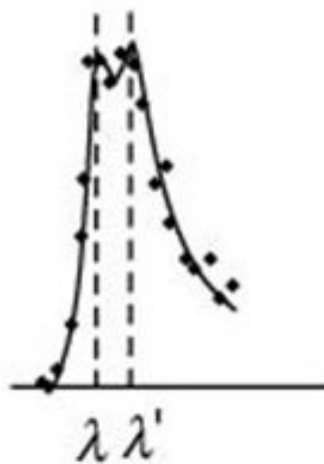
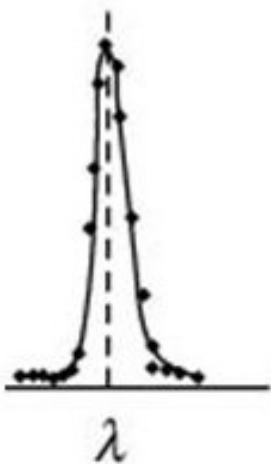
Änderung der Wellenlänge λ' in Abhängigkeit vom Streuwinkel ϑ :

$$\vartheta = 0^\circ$$

$$\vartheta = 45^\circ$$

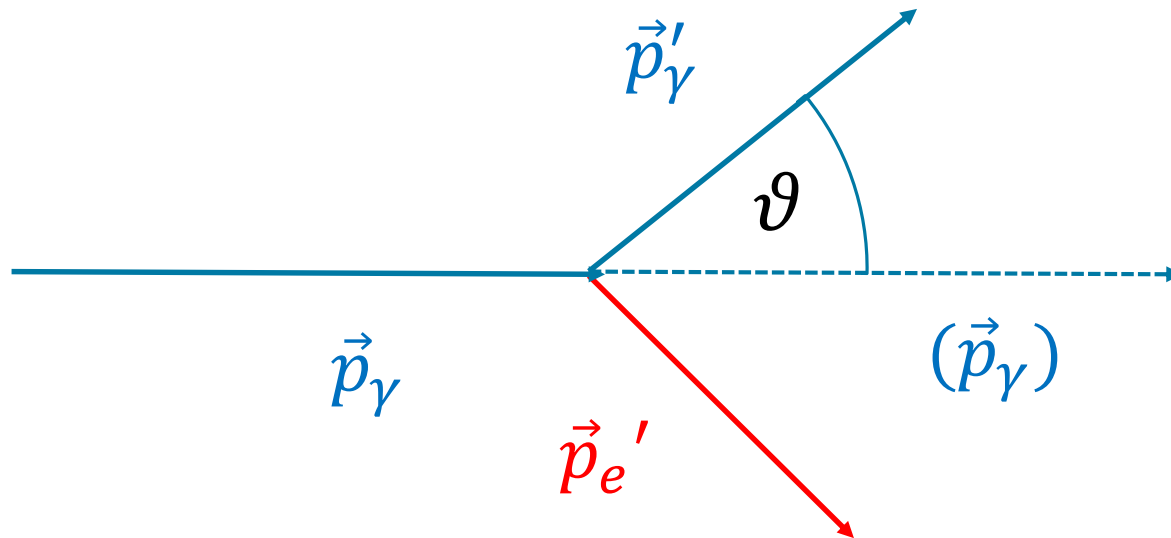
$$\vartheta = 90^\circ$$

$$\vartheta = 135^\circ$$



Der Compton-Effekt

Impulsvektoren vor und nach dem Streuprozess:

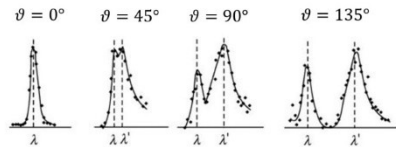
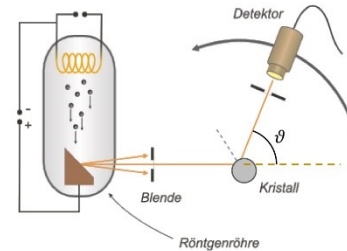


Von der kosmischen Hintergrundstrahlung zur Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation

Arbeitsblatt 2: Der Compton-Effekt

Der Compton-Effekt:

Der Compton-Effekt ist ein Streuprozess eines Röntgen-Photons an einem freien oder schwach gebundenen Elektron. Beim Streuvorgang überträgt das Photon einen Teil seiner Energie $E_\gamma = h \cdot \frac{c}{\lambda}$ und einen Teil seines Impulses $p_\gamma = \frac{h}{\lambda}$ auf das Elektron. Deshalb beobachtet man nach dem Streuprozess Röntgenstrahlung mit größerer Wellenlänge λ' als vor dem Streuprozess (λ). Die Wellenlängenänderung $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ hängt vom Streuwinkel ϑ ab.

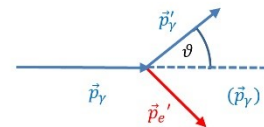


Den Zusammenhang zwischen $\Delta\lambda$ und ϑ beschreibt die **Compton-Formel**

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e \cdot c} \cdot (1 - \cos \theta)$$

Bei der Streuung des Photons an dem Elektron gelten

- Energieerhaltung: $E_\gamma + E_e = E'_\gamma + E'_e$ und
- vektorielle Impulserhaltung: $\vec{p}_\gamma = \vec{p}'_\gamma + \vec{p}'_e$
- relativistische Energie-Impuls-Beziehung:
für Elektronen: $E^2 = m_e^2 c^4 + p^2 c^2$
für Photonen ($m_\gamma = 0$): $E_\gamma = p_\gamma \cdot c$



- Skalarprodukt $\vec{p}_\gamma \circ \vec{p}'_\gamma = p_\gamma \cdot p'_\gamma \cdot \cos \theta$

Dabei sind p_γ und p'_γ die Längen der Impulsvektoren $\vec{p}_\gamma$ und $\vec{p}'_\gamma$ und θ der Winkel zwischen den Impulsvektoren $\vec{p}_\gamma$ und $\vec{p}'_\gamma$.

Aufgaben:

- 1) Leite aus Energie- und Impulserhaltung die Compton-Formel her!

Hinweis:

Leite aus Energie- und vektorieller Impulserhaltung jeweils eine Formel für $\vec{p}'_e$ in Abhängigkeit von p_γ und p'_γ her. Setze dann die beiden Formeln für $(\vec{p}'_e)^2$ gleich und schreibe die beiden Photonenimpulse in Abhängigkeit von den Wellenlängen.

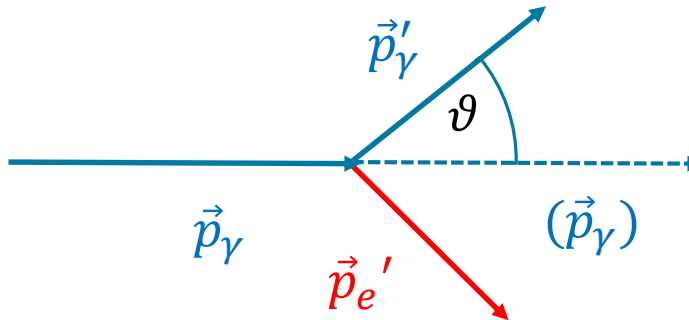
- 2) Bestimme die Wellenlängenverschiebung $\Delta\lambda$ für die besonderen Streuwinkel $\vartheta = 0$, $\vartheta = 45^\circ$, $\vartheta = 90^\circ$ und $\vartheta = 135^\circ$! Überprüfe dein Ergebnis anhand der oben links abgebildeten Wellenlängen-Intensitäts-Diagramme.

Der Compton-Effekt

Compton-Streuung eines Photons an einem Elektron:

Impuls eines Photons:

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{h}{\lambda}$$



Energieerhaltung:

$$E_\gamma + E_e = E'_\gamma + E'_e$$

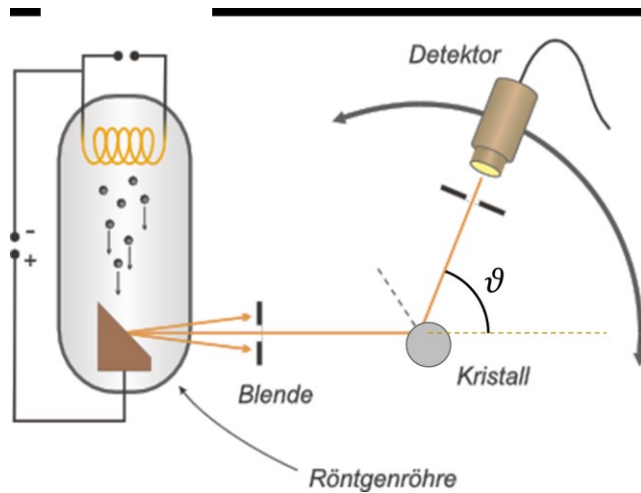
vektorielle Impulserhaltung:

$$\vec{p}_\gamma = \vec{p}'_\gamma + \vec{p}'_e$$

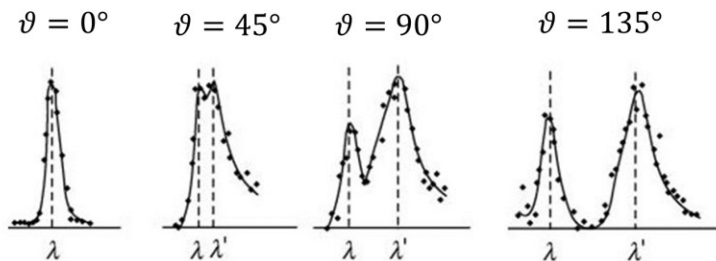
$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e \cdot c} \cdot (1 - \cos\vartheta)$$

Der Compton-Effekt

Compton-Streuung eines Photons an einem Elektron:



Arthur Compton
1927



$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e \cdot c} \cdot (1 - \cos\vartheta)$$

1) Die Hohlraumstrahlung: Geburt der Quantenmechanik

2) Der Welle-Teilchen-Dualismus

2.1) Teilcheneigenschaften elektromagnetischer Wellen

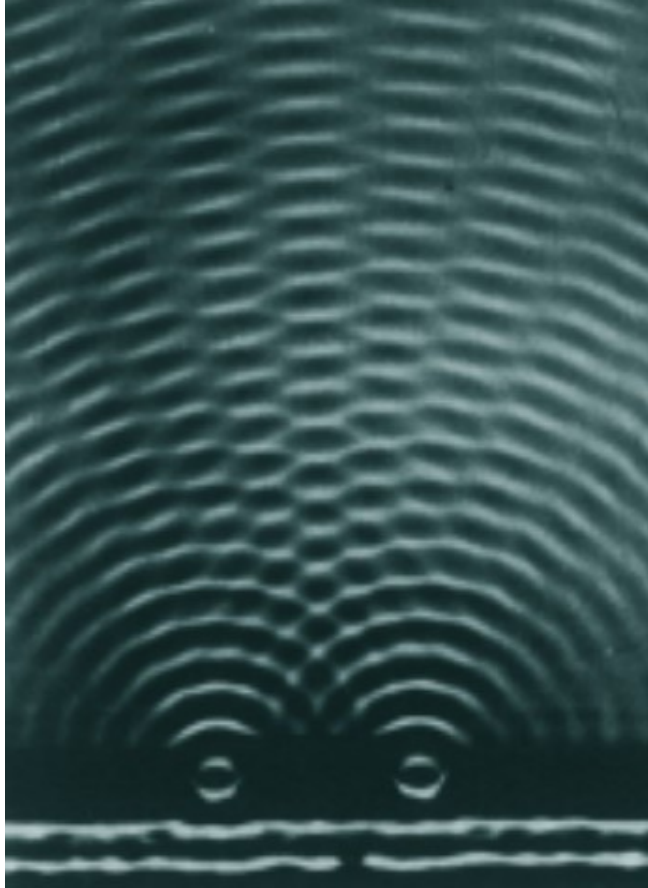
2.1.1) Der Lichtelektrische Effekt

2.1.2) Der Compton-Effekt

2.2) Welleneigenschaften von Teilchen

2.2.1) Interferenz von Lichtwellen

Interferenz am Doppelspalt:

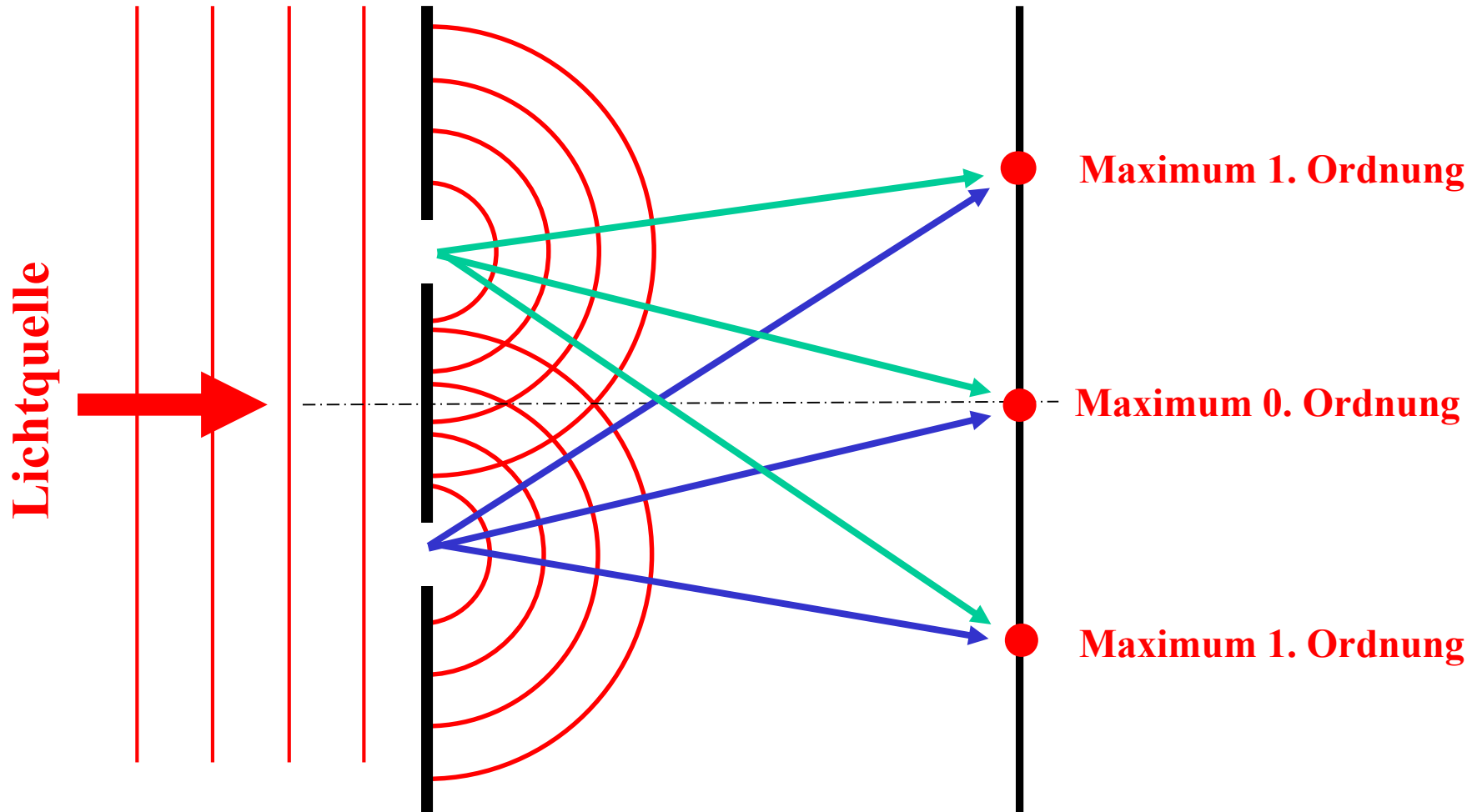


Wasserwellen

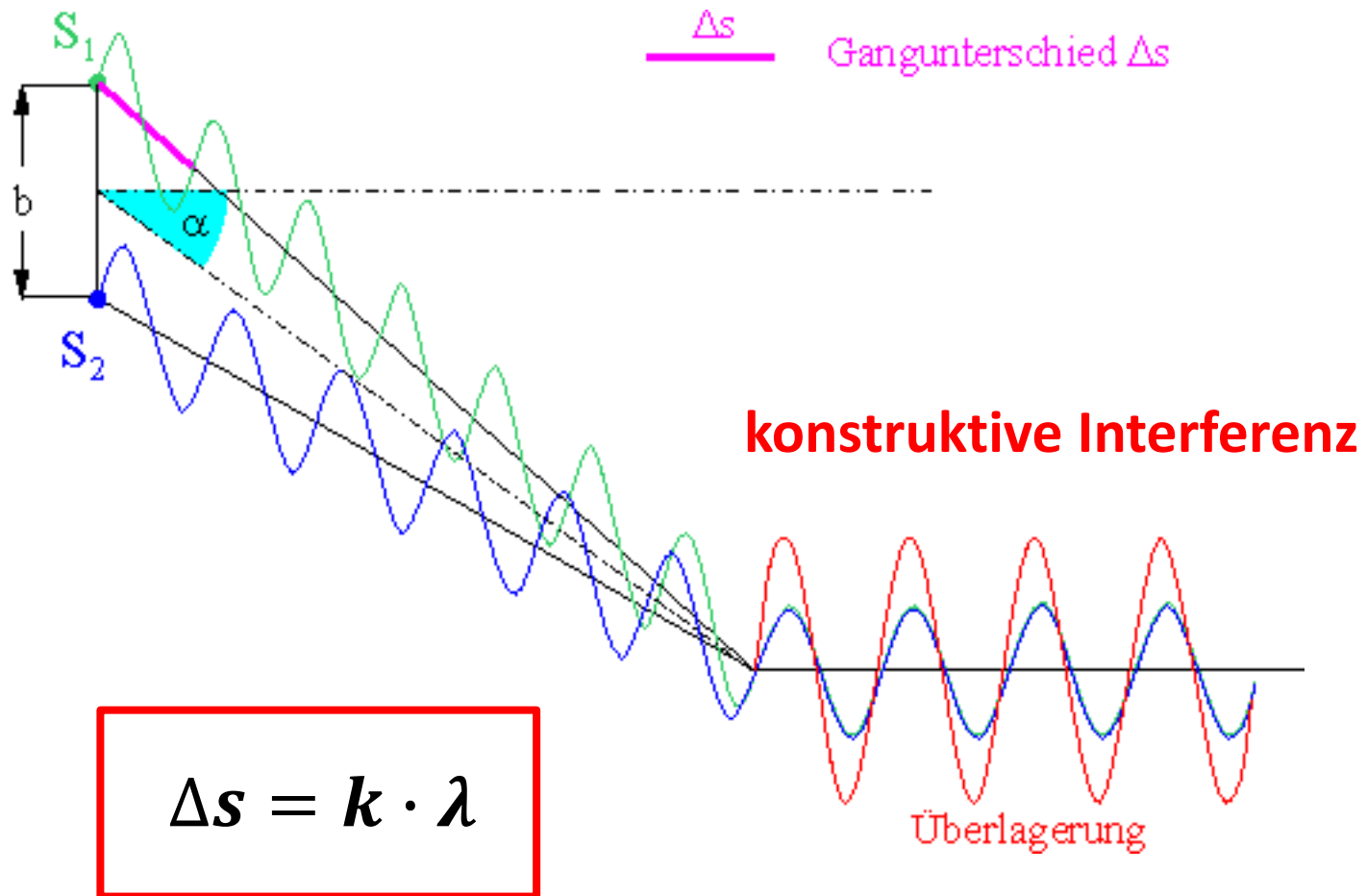


Lichtwellen

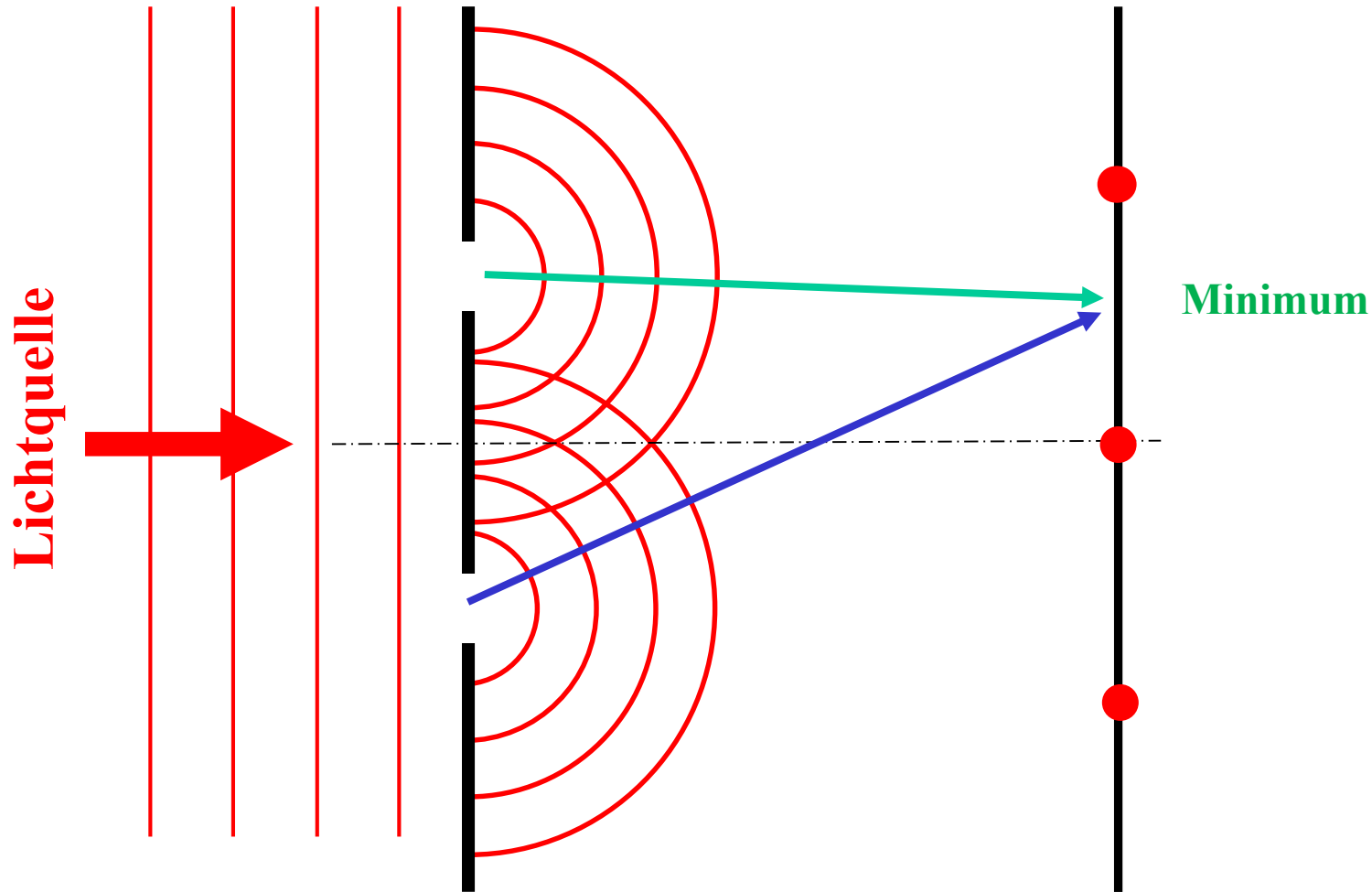
Interferenz am Doppelspalt:



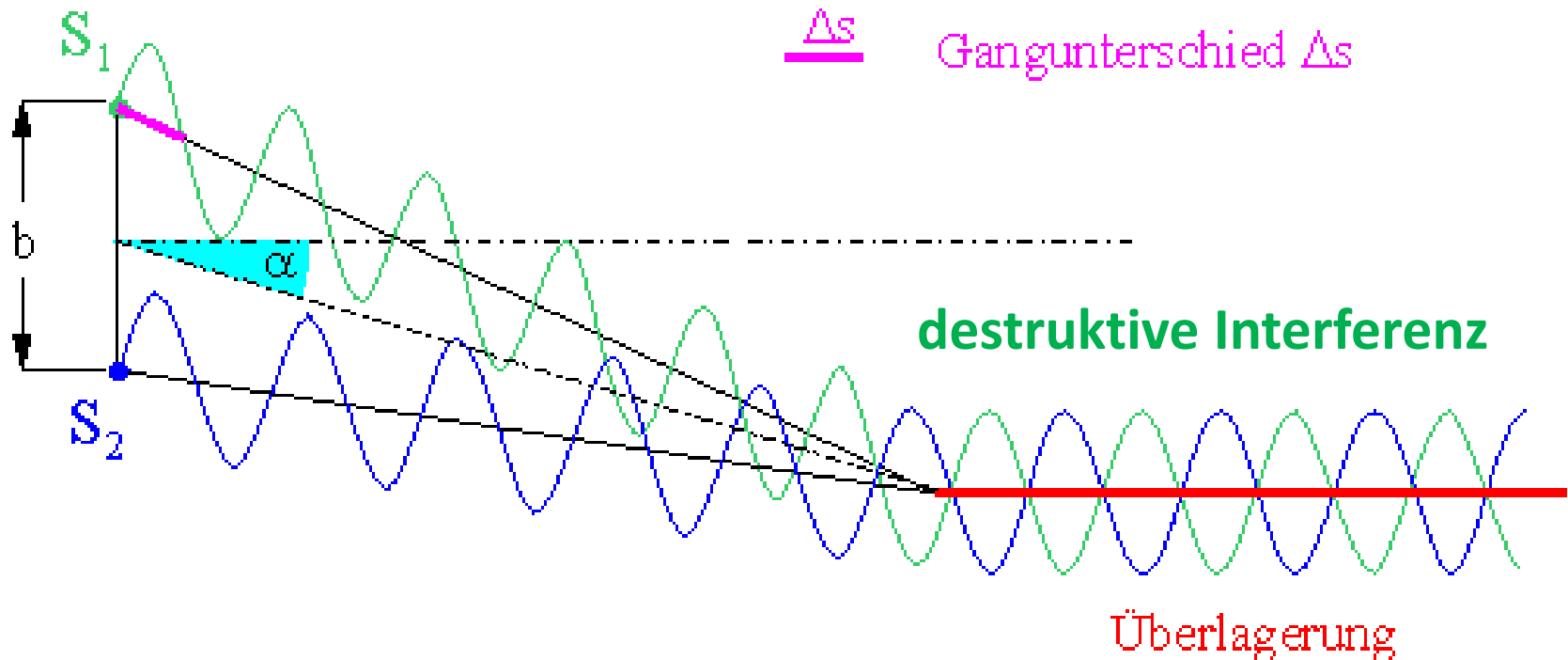
Entstehung eines Interferenzmaximums:



Interferenz am Doppelspalt:

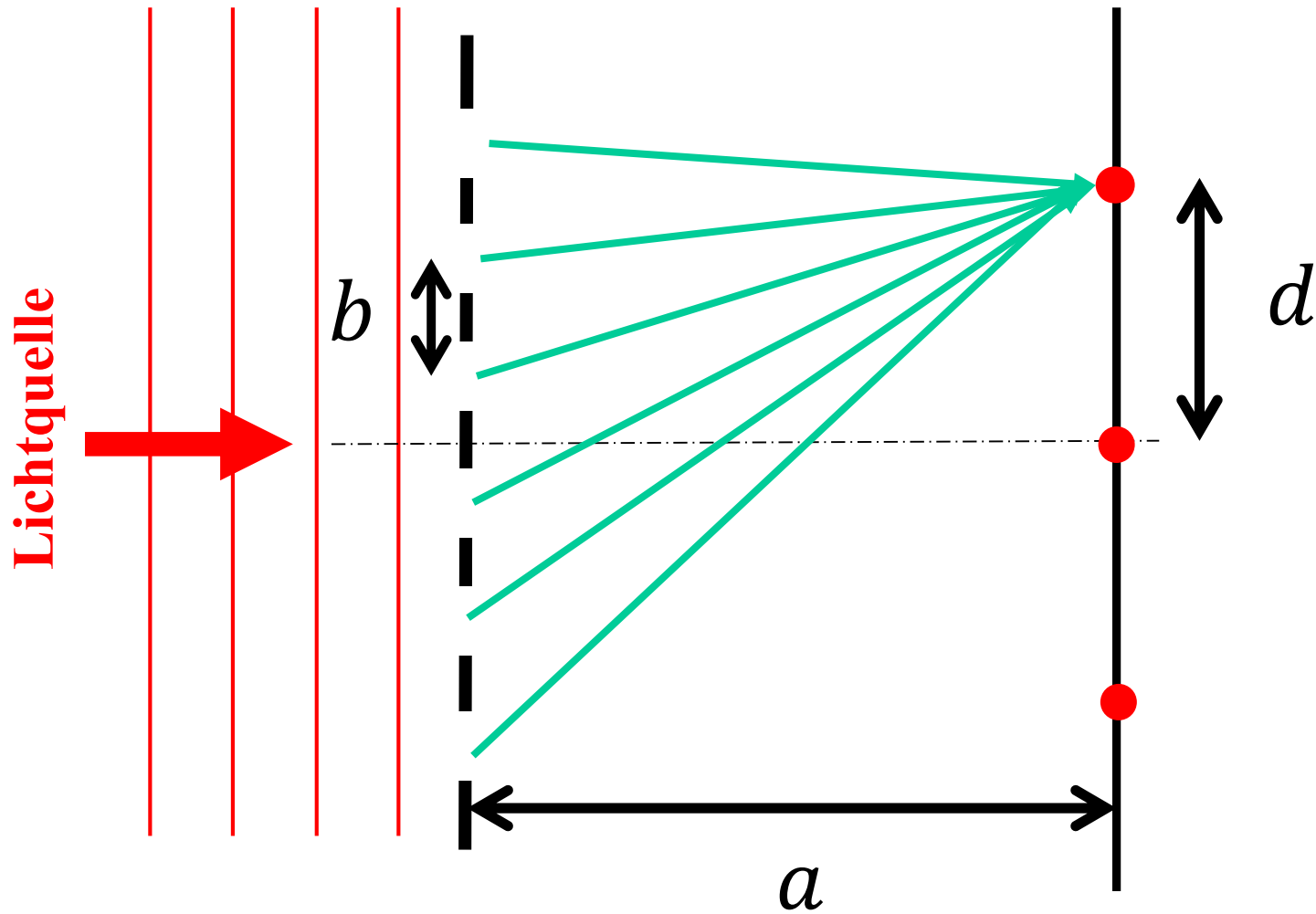


Entstehung eines Interferenzminimums:



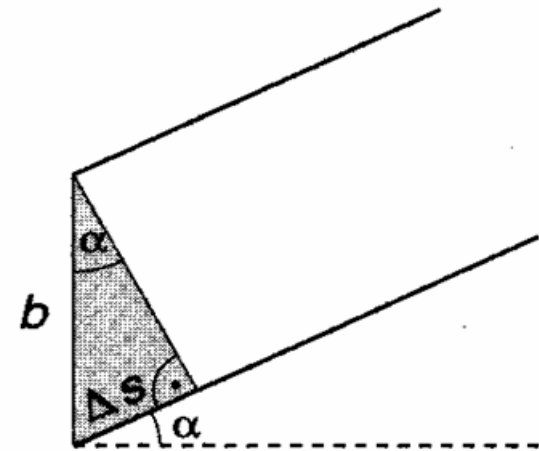
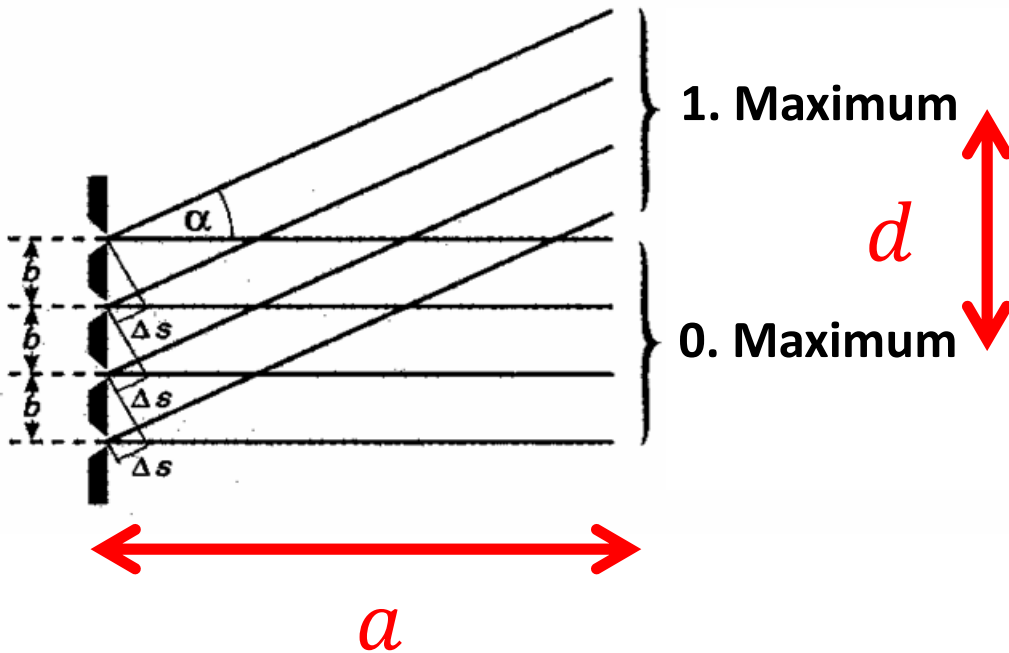
$$\Delta s = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Interferenz am optischen Gitter:



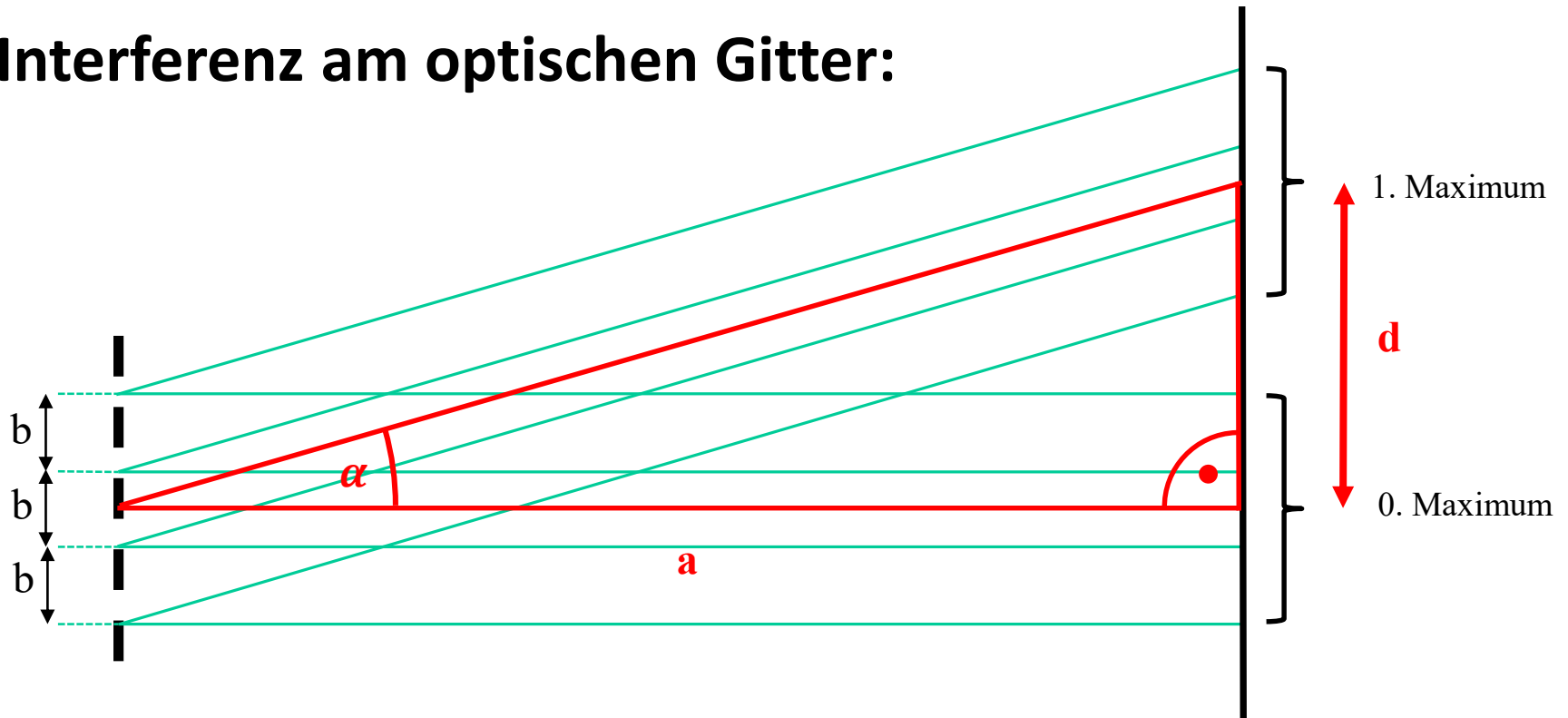
Interferenz am optischen Gitter:

Näherung für $a \gg d$:



$$b \cdot \sin \alpha = k \cdot \lambda$$

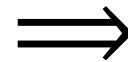
Interferenz am optischen Gitter:



$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

$$KWN: \sin \alpha \approx \tan \alpha$$

$$b \cdot \sin \alpha = k \cdot \lambda = \lambda \text{ für } k = 1$$



$$d = \frac{a}{b} \cdot \lambda$$

1) Die Hohlraumstrahlung: Geburt der Quantenmechanik

2) Der Welle-Teilchen-Dualismus

2.1) Teilcheneigenschaften elektromagnetischer Wellen

2.1.1) Der Lichtelektrische Effekt

2.1.2) Der Compton-Effekt

2.2) Welleneigenschaften von Teilchen

2.2.1) Interferenz von Lichtwellen

2.2.2) Die De Broglie-Hypothese



Louis De Broglie

(1892 – 1987)

Nobelpreis 1929

1) Die Hohlraumstrahlung: Geburt der Quantenmechanik

2) Der Welle-Teilchen-Dualismus

2.1) Teilcheneigenschaften elektromagnetischer Wellen

2.1.1) Der Lichtelektrische Effekt

2.1.2) Der Compton-Effekt

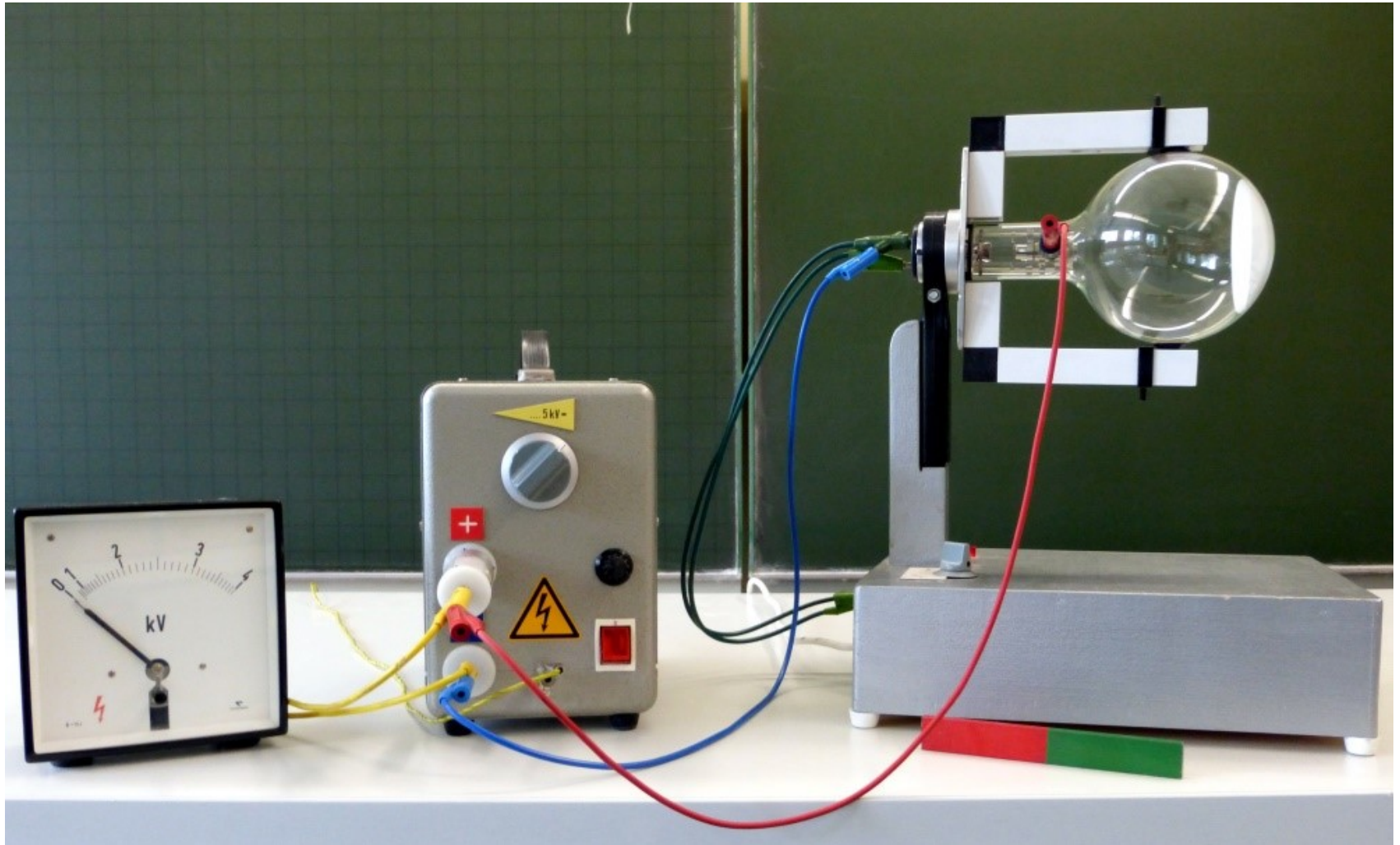
2.2) Welleneigenschaften von Teilchen

2.2.1) Interferenz von Lichtwellen

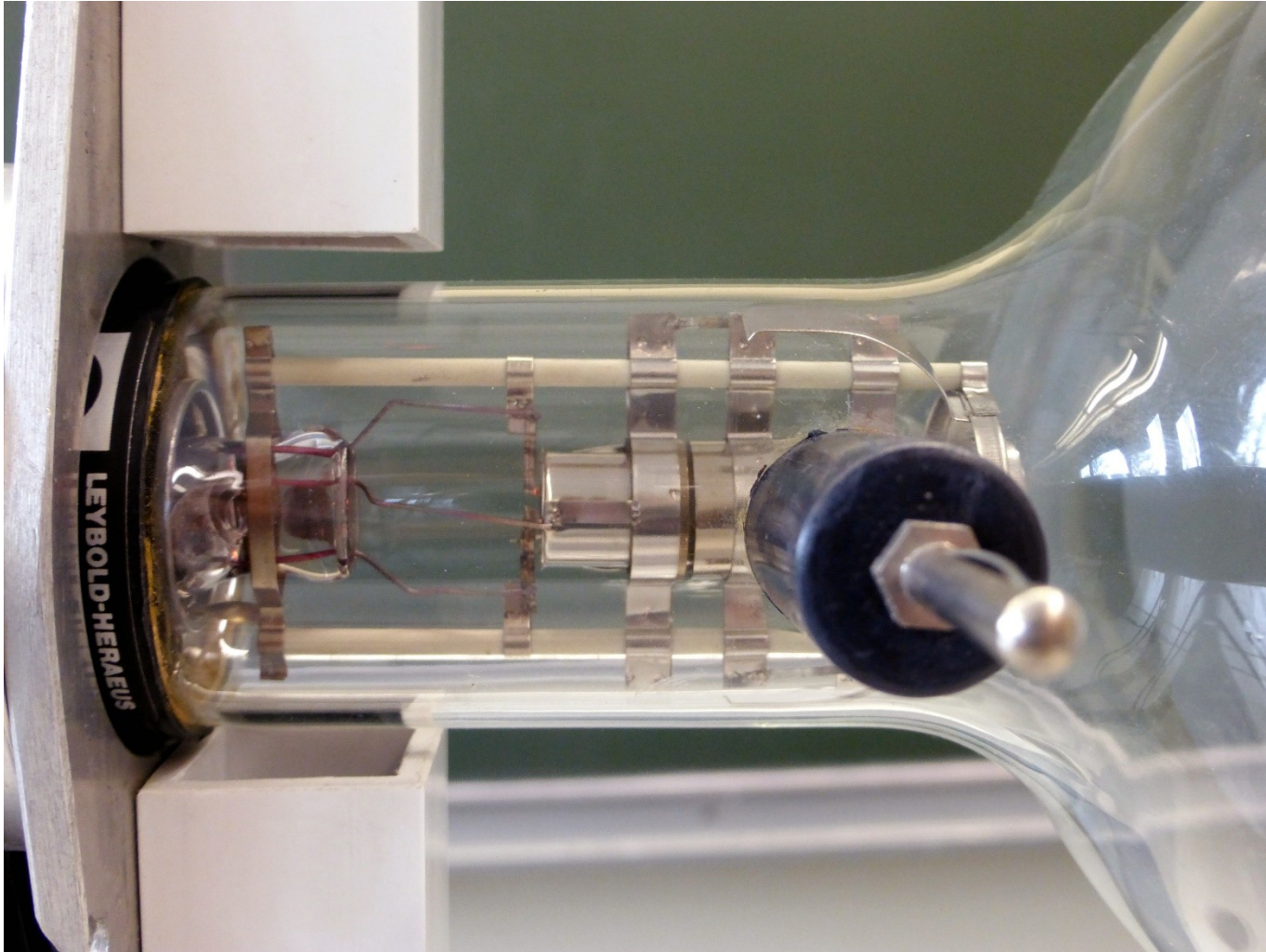
2.2.2) Die De Broglie-Hypothese

2.2.3) Elektronenbeugungsröhre und Doppelspalt

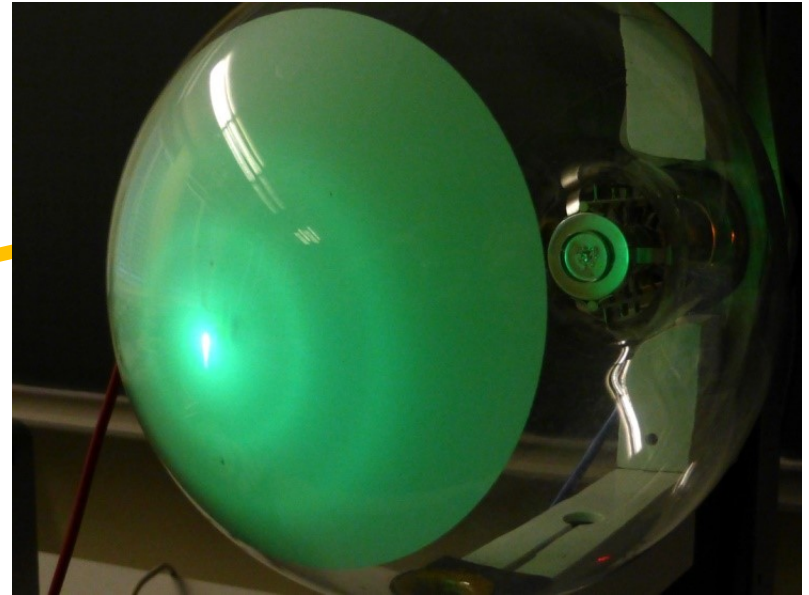
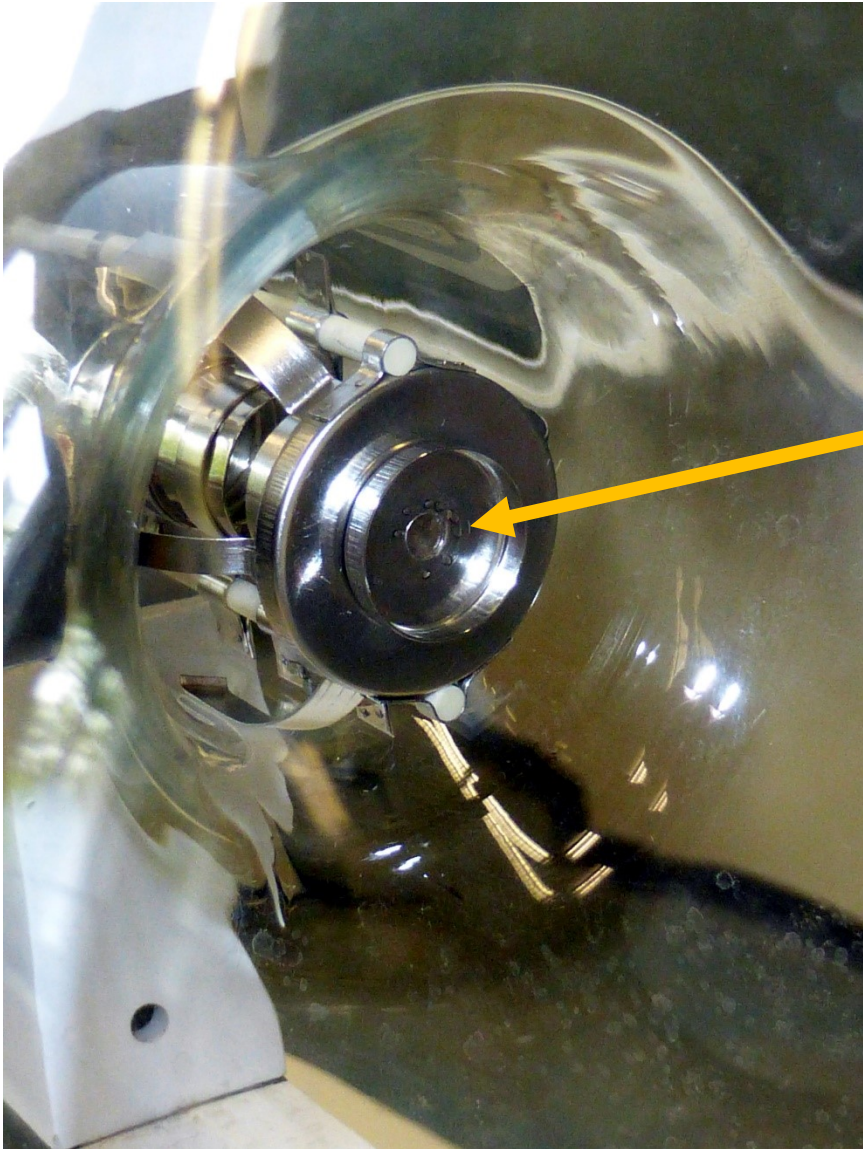
Experiment: Elektronenbeugungsröhre



Experiment: Elektronenbeugungsröhre



Experiment: Elektronenbeugungsröhre



Elektronen erzeugen nach
Durchlaufen einer Graphitfolie
ein Interferenzmuster

Aus dem Institut für Angewandte Physik der Universität Tübingen

Zeitschrift für Physik 161, S. 454 - 474 (1961)

**Elektroneninterferenzen an mehreren künstlich hergestellten Feinspalten
von Claus Jönsson**

Hier soll von einem weiteren, auf die Elektronenoptik übertragenen Interferenzversuch der Lichtoptik berichtet werden: der Beugung von Elektronenwellen am Spalt und an periodischen Anordnungen bis zu fünf Spalten, was zum ersten Mal auch zu 3-, 4- und 5-Strahlinterferenzen in der Elektronenoptik führt.

Der ... naheliegende Versuch, Elektronenbeugung am künstlich hergestellten Spalt, mehreren Spalten oder Gitter zu machen, stößt auf einige technische Schwierigkeiten, die seine Verwirklichung bisher verhindert haben. Diese sind einmal die kleine Wellenlänge des Elektronenstrahls, denn um eine vernünftige Elektronenoptik treiben zu können, muss man mit mittelschnellen Elektronen arbeiten. Hier wurden stets mit 50 kV beschleunigte Elektronen verwendet, deren de Broglie-Wellenlänge etwa 0,05 Angström das sind $5 \cdot 10^{-12}$ m beträgt. Sie ist also wesentlich kleiner als die Atomdimension, so dass es grundsätzlich unmöglich ist, Materie mit Spalten, deren Breite und Gitterkonstante sich in der Größenordnung der Wellenlänge bewegen, zu versehen. Es können nur wesentlich größere Spalte hergestellt werden. Dies ist an sich keine Einschränkung für solche Versuche, nur muss man sich dann sehr um die kohärente Ausleuchtung der Spalte und die Nachvergrößerung der sehr feinen Interferenzfiguren bemühen. Aus der im Verhältnis zu den Atomdimensionen sehr kleinen Wellenlänge folgt eine weitere Schwierigkeit: es gibt für Elektronen keine durchsichtigen Substanzen, wie es sie für Licht gibt, ein Elektronenstrahl wird nur im Vakuum nicht gestreut. Deshalb ist hier bei der Herstellung der Spalte nicht die Vereinfachung möglich, dass man sie auf einen durchsichtigen Träger präpariert, wie es in der Lichtoptik z. B. bei dem auf Glas geritzten Beugungsgitter der Fall ist, sondern man muss ein Verfahren finden, das einem erlaubt, materiefreie Spalte in Metallfolien herzustellen, deren Dimensionen so klein sind, dass sie noch intensiv genug kohärent ausgeleuchtet werden können ...

Überträgt man die Dimensionen (des benutzten) Beugungsversuches auf die Lichtoptik, so hätte man wegen der 10^5 -fach größeren Wellenlänge 5 cm breite Spalte mit einer Gitterkonstanten von 20 cm zu verwenden. Die Abstände zwischen Quelle und Spalten und Auffangebene wären 30 bzw. 40 km und die Breite der Quelle müsste 5 mm sein. In der Lichtoptik ist dieser Versuch aus Intensitätsgründen nicht zu verwirklichen....

Es ist hervorzuheben, dass die Empfindlichkeit dieses Elektronenbeugungsgerätes der eines Elektronenmikroskops mit 10^6 -facher elektronenoptischer Vergrößerung entspricht, d. h. es reagiert stark auf Spannungsschwankungen, Erschütterungen und magnetische Störfelder. ...

Zur Beobachtung der Interferenzerscheinungen von 50 kV-Elektronen an den so hergestellten Spalten musste eine spezielle Beugungsanlage gebaut werden.... Mit dieser Anlage wurden Beugungsdiagramme an 1, 2, 3, 4 und 5 Spalten aufgenommen.... Es konnte gezeigt werden, dass die von der Lichtoptik her bekannten Beugungserscheinungen an mehreren Spalten in entsprechender Weise auch mit Elektronen beobachtet werden können.

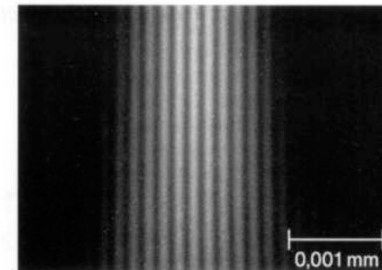
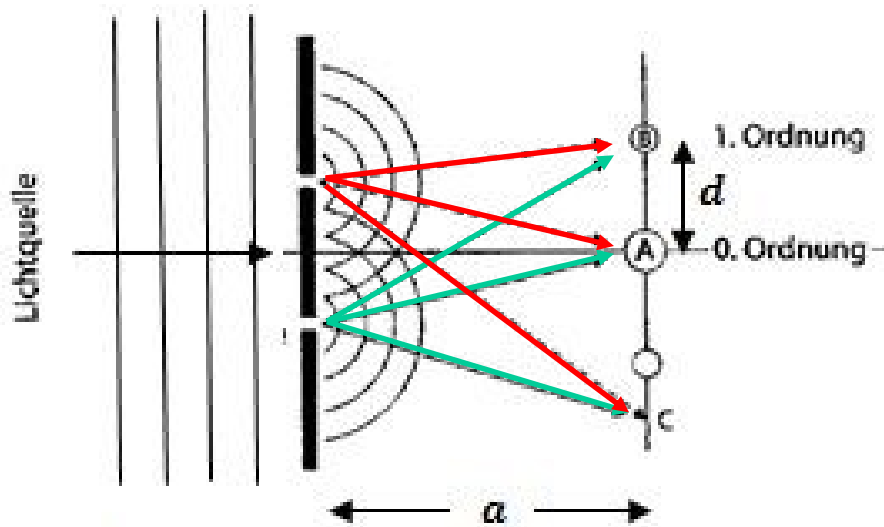


Bild von Elektroneninterferenzen am Doppelspalt

Interferenz von Lichtwellen und Interferenz von Elektronen:

Experiment: Interferenz von Laserlicht am
Doppelspalt und am optischen Gitter:

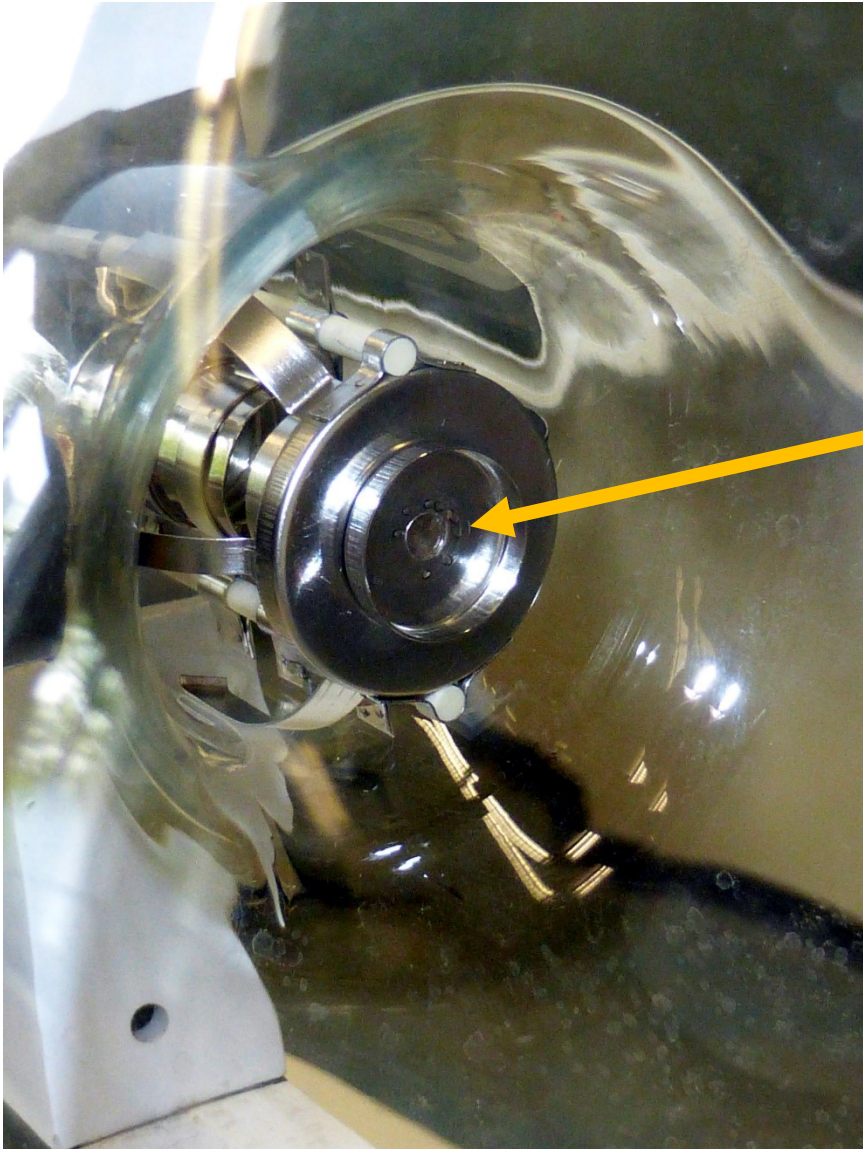


Doppelspaltexperiment mit
Elektronen:



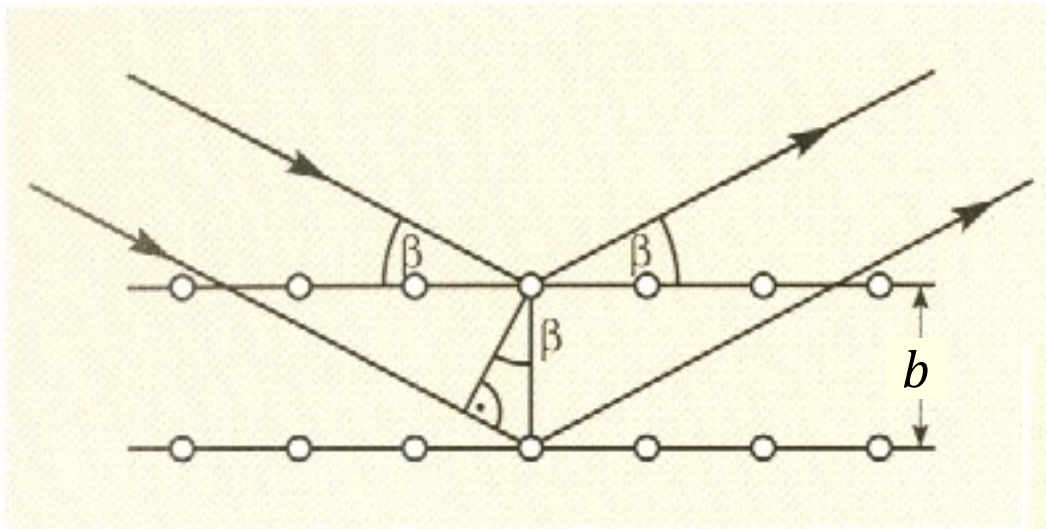
Claus Jönsson
1959

Experiment: Elektronenbeugungsröhre

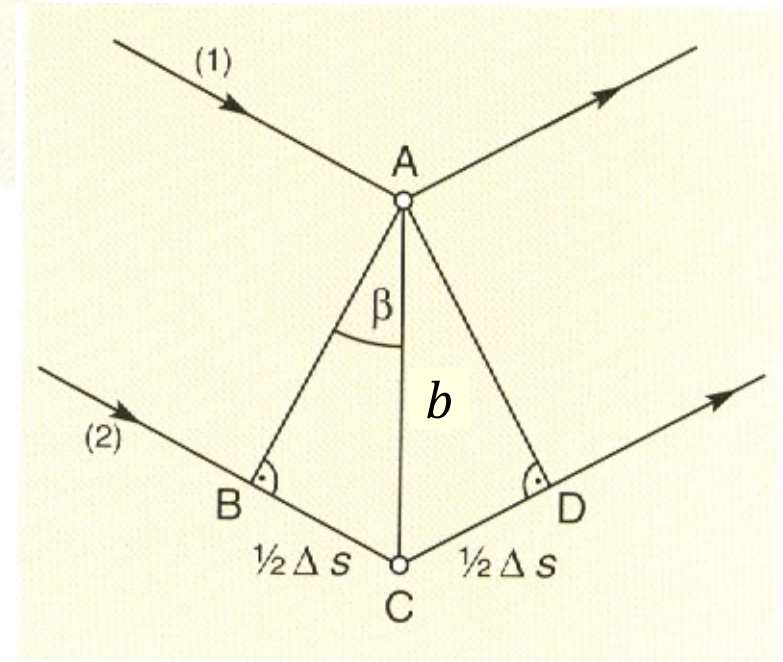


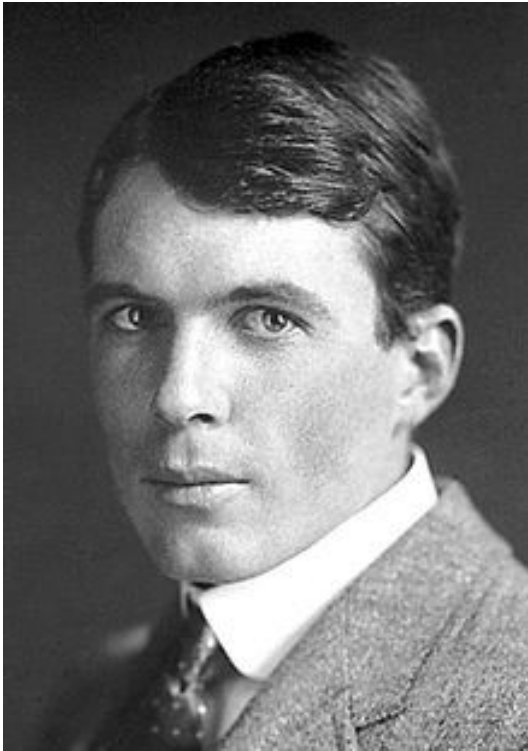
Folie mit
Graphitstaub

Bragg-Reflexion von Röntgenstrahlung an den Netzebenen eines Kristalls



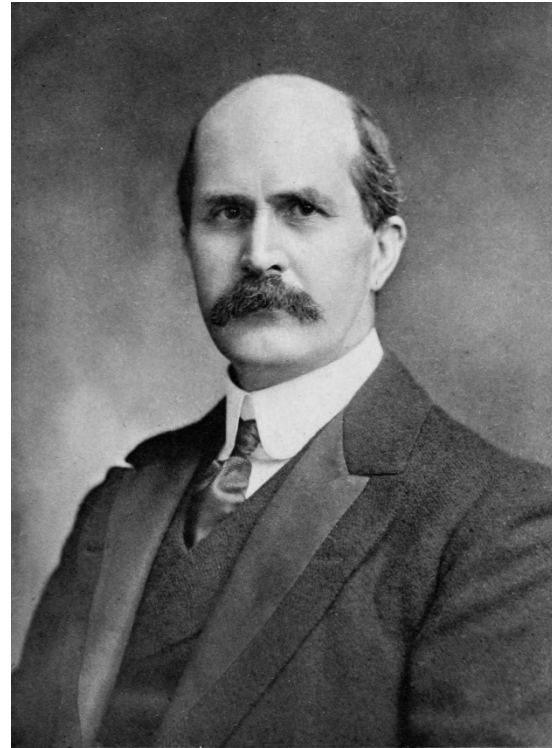
$$\Delta s = 2 \cdot b \cdot \sin \beta = k \cdot \lambda$$





**William Lawrence
Bragg**

(1890 – 1971)



**William Henry
Bragg**

(1862 – 1942)

Nobelpreis 1915



Clinton Davisson

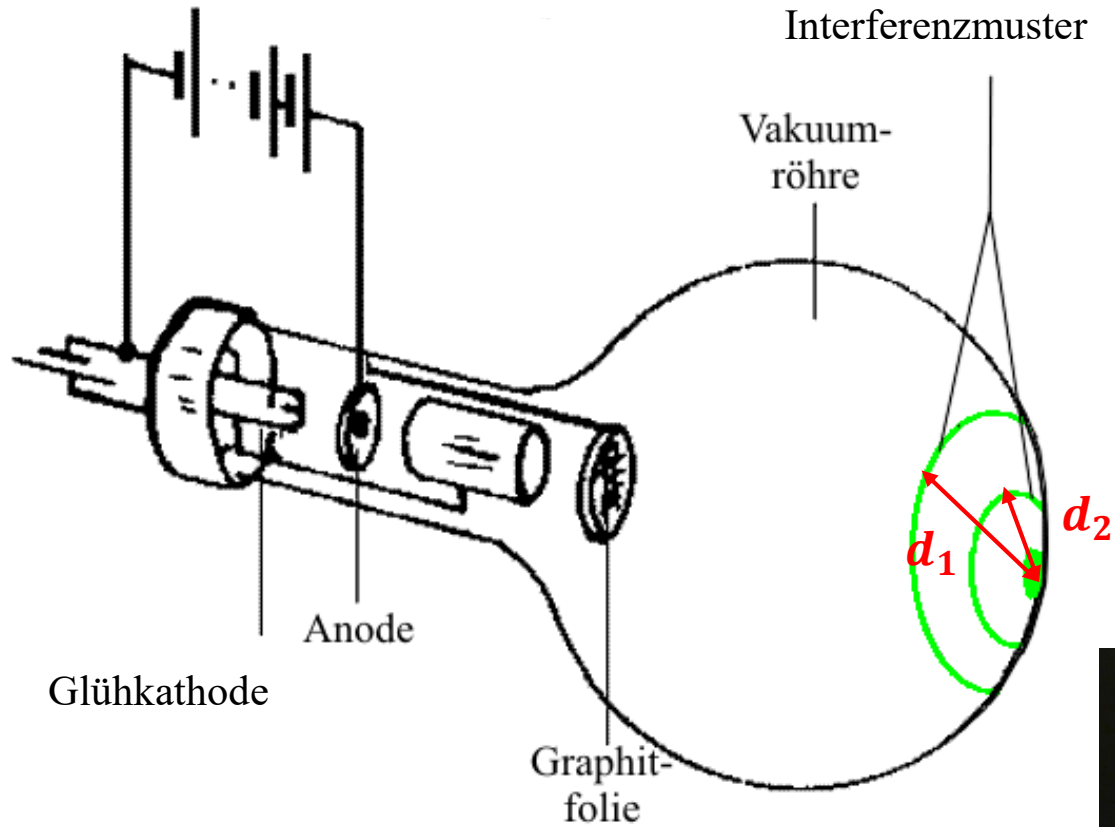
(1881 – 1958)

Lester Germer

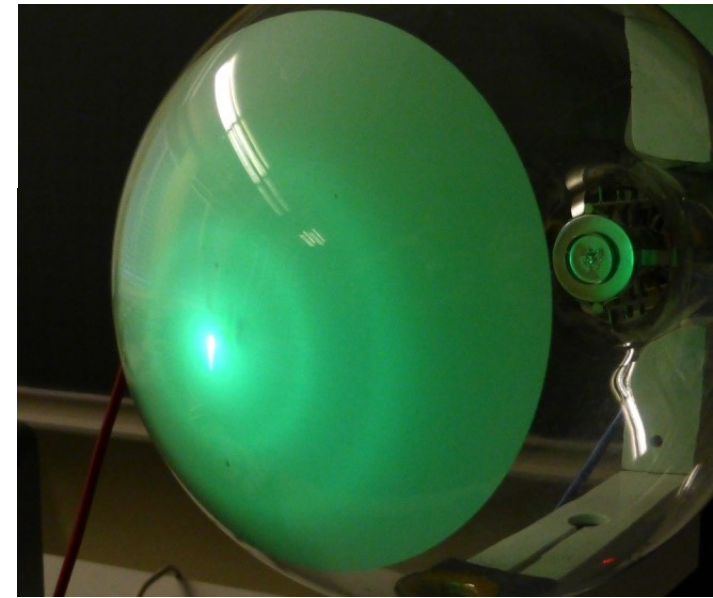
(1896 – 1971)

Nobelpreis 1937

Beschleunigungsspannung U_B

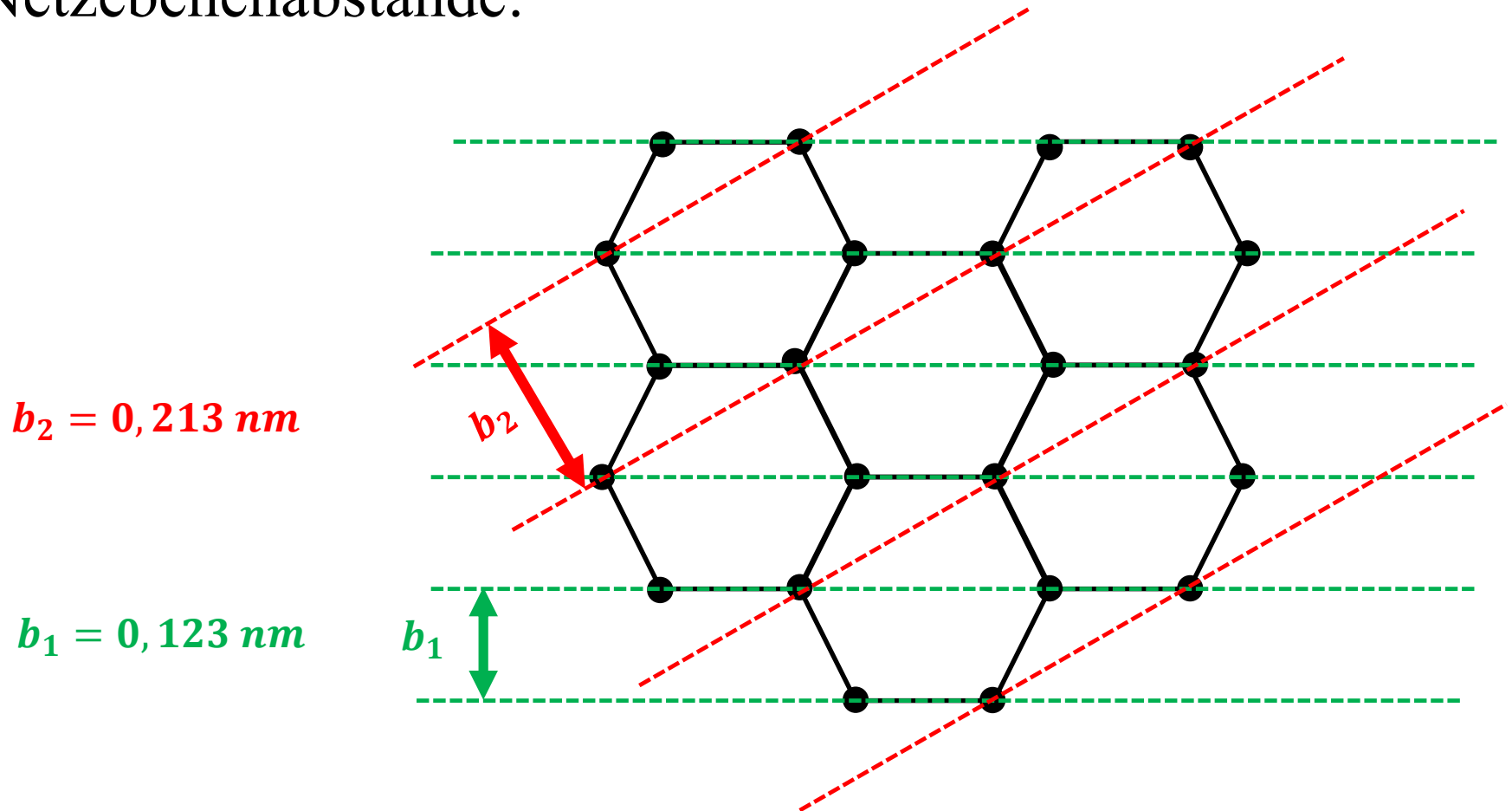


Interferenzmuster bei der Elektronenbeugungsröhre



Sechseckige Gitterstruktur des Graphitkristalls

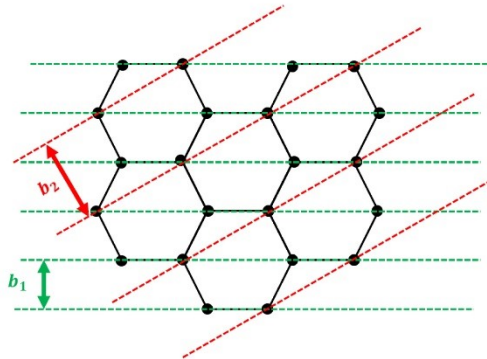
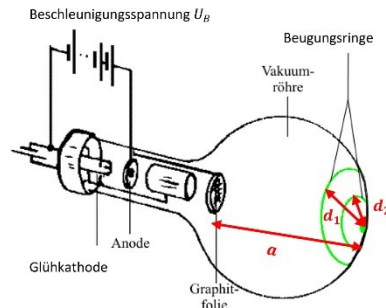
Netzebenenabstände:



Von der kosmischen Hintergrundstrahlung zur Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation

Arbeitsblatt 3: Die Elektronenbeugungsröhre

In der **Elektronenbeugungsröhre** werden in einer Glühkathode freie Elektronen erzeugt und dann in einem elektrischen Feld beschleunigt. Nachdem die Elektronen eine Graphitfolie durchlaufen haben, erzeugen sie auf einem Fluoreszenzschirm konzentrische Kreise, sogenannte Beugungsringe, mit den Radien d_1 und d_2 um einen leuchtenden Fleck in der Mitte. Es handelt sich dabei um zwei Interferenzmaxima 1. Ordnung, die durch Braggreflexion an Kohlenstoffatomen in Netzebenen der Graphitkristalle mit zwei unterschiedlichen Netzebenenabständen b_1 und b_2 erzeugt werden.



Interferenz ist eine charakteristische Welleneigenschaft. Das Experiment legt also nahe, dass Elektronen unter bestimmten Bedingungen Welleneigenschaften zeigen.

Dem Elektron wird über seinen Impuls $p = m \cdot v = \frac{h}{\lambda}$ die **De Broglie-Wellenlänge** λ zugeordnet.

Aufgaben:

- Wenn zwischen Glühkathode und Anode die Beschleunigungsspannung U_B angelegt wird, werden die Elektronen aus der Ruhe auf die Bewegungsenergie $E_{kin} = e \cdot U_B$ beschleunigt.
 - Rechne nach, dass für den Impuls eines in der Elektronenbeugungsröhre durch die Beschleunigungsspannung U_B beschleunigten Elektrons gilt

$$p = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{e^2 U_B^2 + 2 \cdot e U_B \cdot E_0}$$

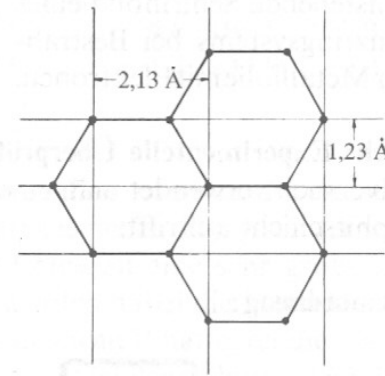
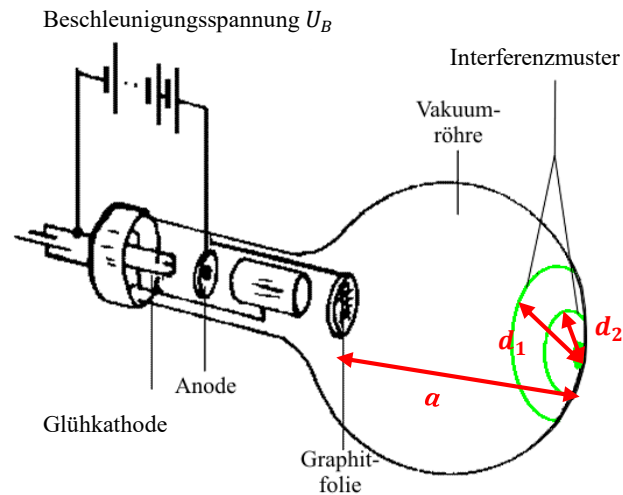
Verwende dabei $E_{kin} = E - E_0 = e \cdot U_B$ und die relativistische Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$.

- Für die Interferenz von Licht am optischen Gitter gilt näherungsweise: $d = \frac{a}{b} \cdot \lambda$ (vgl. Formelsammlung!)
 - Mache dir klar, welche Bedeutung die in der Formel $d = \frac{a}{b} \cdot \lambda$ vorkommenden Größen bei der Erzeugung eines Interferenzmusters mit Licht am optischen Gitter und andererseits bei der Anwendung auf die Elektronenbeugungsröhre haben!
- Miss an der Elektronenbeugungsröhre den Abstand a der Graphitfolie vom Fluoreszenzschirm und bei der Beschleunigungsspannung $U_B = 2,0 \text{ kV}$ die Radien d_1 und d_2 der beiden Beugungsringe!
- Berechne die De Broglie-Wellenlänge λ , die den bei der Beschleunigungsspannung $U_B = 2,0 \text{ kV}$ beschleunigten Elektronen zugeordnet wird! ($\lambda \approx 2,74 \cdot 10^{-11} \text{ m}$)
- Berechne für $a = 13 \text{ cm}$, $d_1 = 3,0 \text{ cm}$ und $d_2 = 1,7 \text{ cm}$ mithilfe der Beziehung $d = \frac{a}{b} \cdot \lambda$ die Netzebenenabstände b_1 und b_2 der Graphitkristalle in der Graphitfolie!

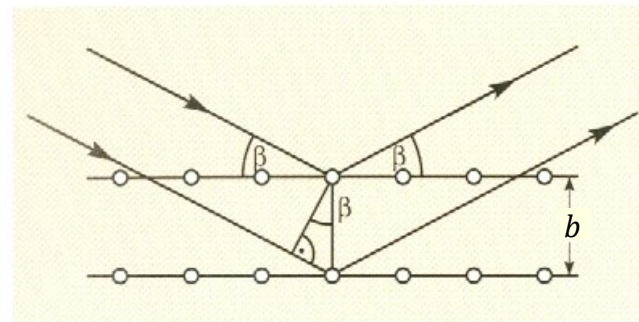
Die Netzebenenabstände liegen in der Größenordnung von 10^{-10} m . In dieser Größenordnung liegt der Abstand der Atome in einem Kristallgitter bzw. in der Graphitfolie der Elektronenbeugungsröhre.

Die De Broglie-Wellenlänge λ der beschleunigten Elektronen hat die Größenordnung 10^{-11} m , beträgt also etwa ein Zehntel des Abstands der Netzebenen der Graphitkristalle. Damit eignet sich die Graphitfolie als atomares Beugungsgitter für die beschleunigten Elektronen.

Interferenz von Elektronen in der Elektronenbeugungsröhre:



Bragg-Reflexion:



Die De Broglie-Hypothese

Welleneigenschaften von Teilchen:

Frequenz: $f = \frac{E}{h}$

De Broglie-Wellenlänge: $\lambda = \frac{h}{p}$



Louis De Broglie
1923

Der Welle-Teilchen-Dualismus

Licht und Teilchen zeigen in bestimmten Situationen Welleneigenschaften und in bestimmten Situationen Teilcheneigenschaften. Ob Welleneigenschaften wie Interferenz oder Teilcheneigenschaften wie Impuls beobachtet werden, hängt von der Versuchsanordnung ab.

1) Die Hohlraumstrahlung: Geburt der Quantenmechanik

2) Der Welle-Teilchen-Dualismus

2.1) Teilcheneigenschaften elektromagnetischer Wellen

2.1.1) Der Lichtelektrische Effekt

2.1.2) Der Compton-Effekt

2.2) Welleneigenschaften von Teilchen

2.2.1) Interferenz von Lichtwellen

2.2.2) Die De Broglie-Hypothese

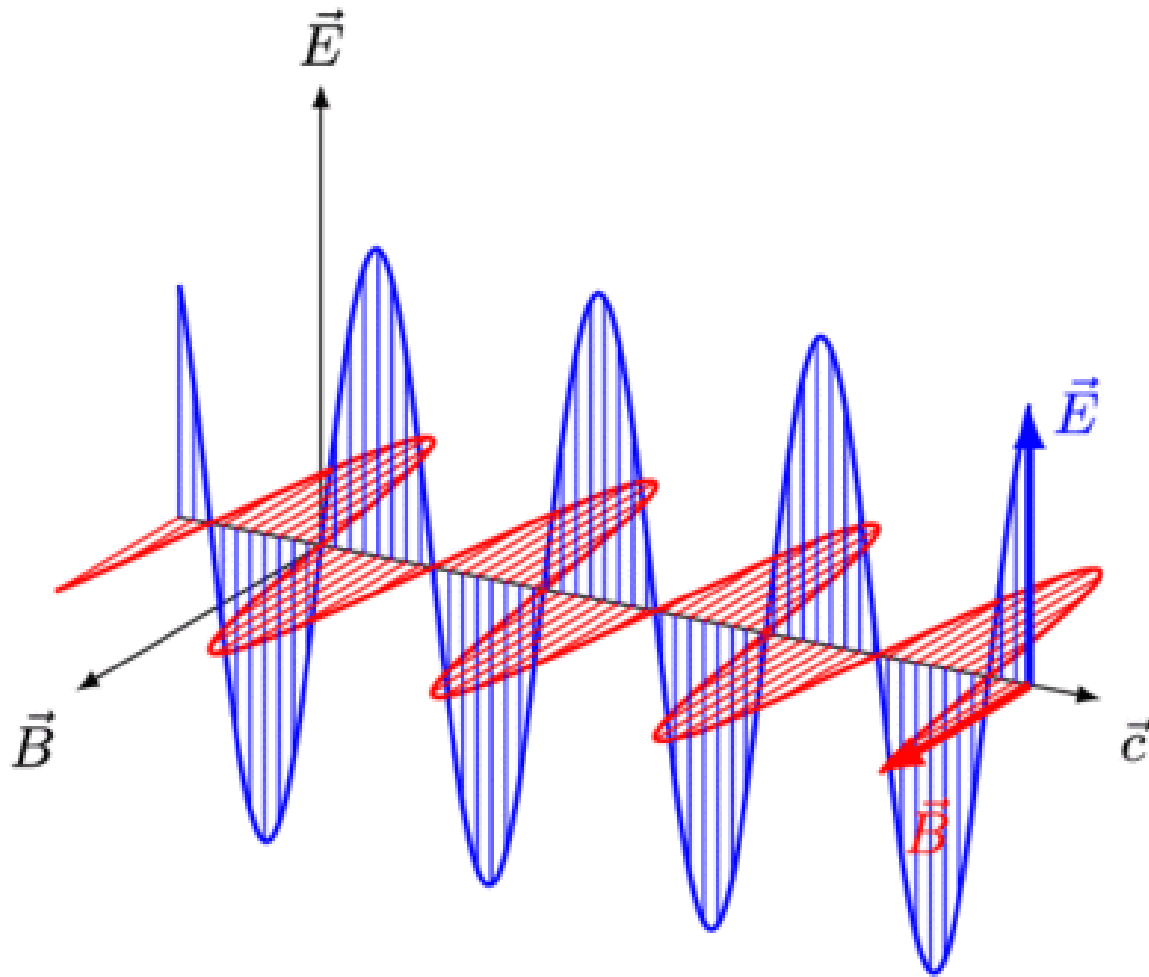
2.2.3) Elektronenbeugungsröhre und Doppelspalt

3) Wellenfunktionen

3.1) Physikalische Bedeutung der Wellenfunktion

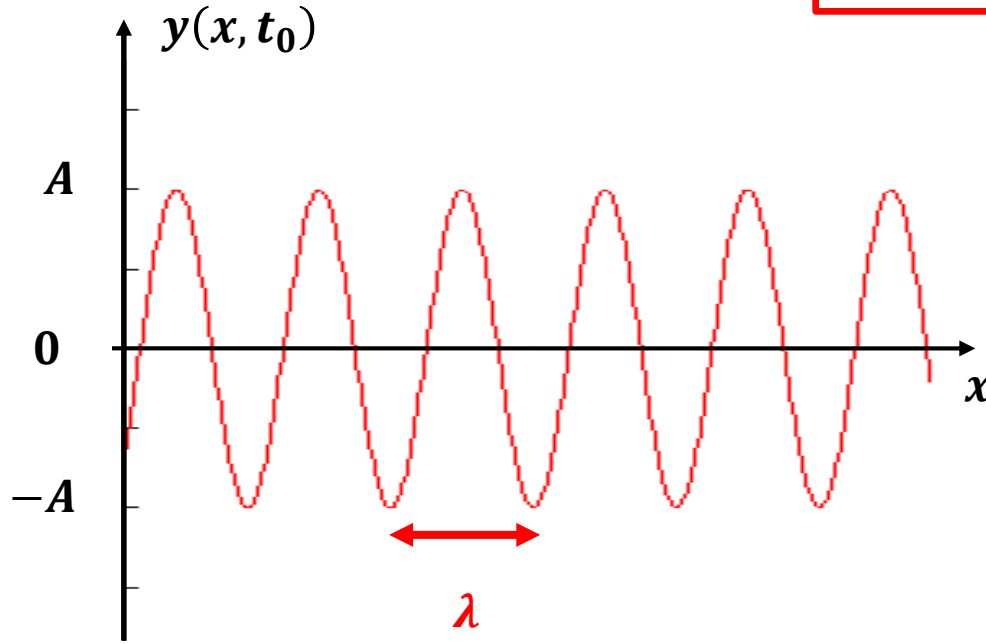


Elektromagnetische Welle



Harmonische Wellenfunktion:

$$y(x) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x - \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$



Wellenzahl k :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Kreisfrequenz ω :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$\Rightarrow$

$$y(x) = A \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) \text{ mit } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Wellenfunktionen und Wahrscheinlichkeitsinterpretation:

Materiewellen als Wahrscheinlichkeitswellen:

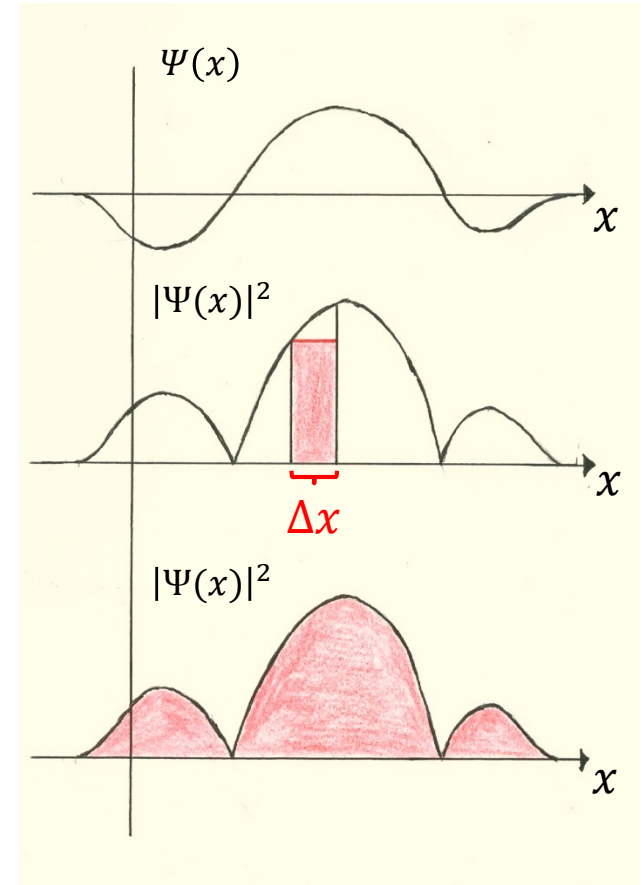
Wellenfunktion: $\Psi(x)$

Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte: $|\Psi(x)|^2$

Aufenthaltswahrscheinlichkeit

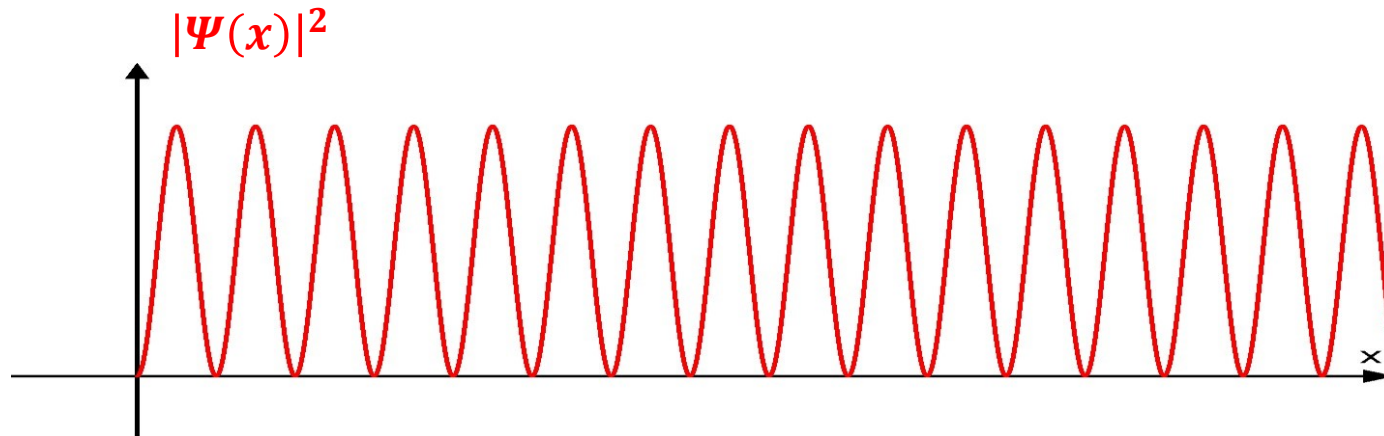
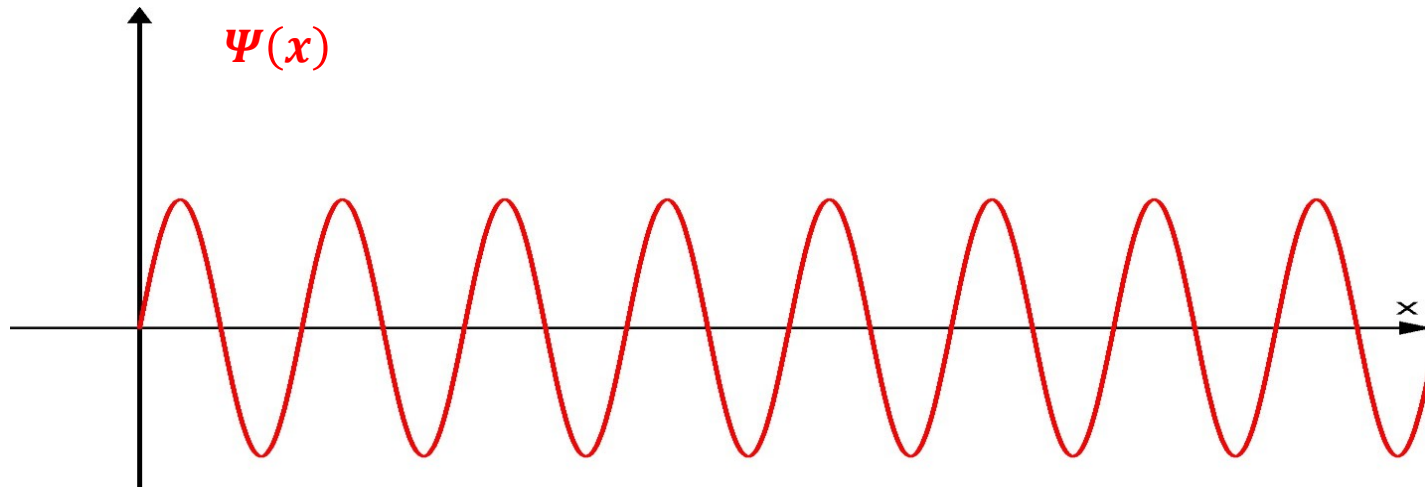
im Bereich $[x ; x + \Delta x]$ für kleine Δx : $|\Psi(x)|^2 \cdot \Delta x$

Die **Gesamtaufenthaltswahrscheinlichkeit im Bereich $[-\infty ; \infty]$** ,
d. h. die Gesamtfläche unter der $|\Psi(x)|^2$ -Kurve,
hat den Wert **1**.



Solche Wellenfunktionen heißen **normierbare Wellenfunktionen**.

Beispiel für eine nicht normierbare Wellenfunktion (harmonische Welle):

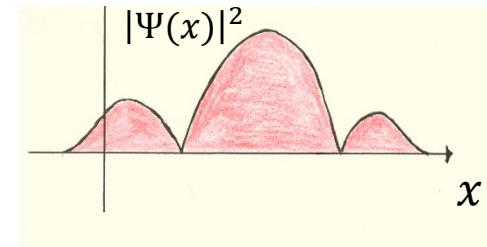
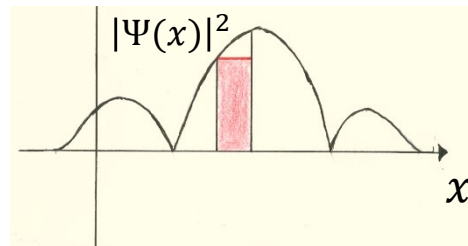
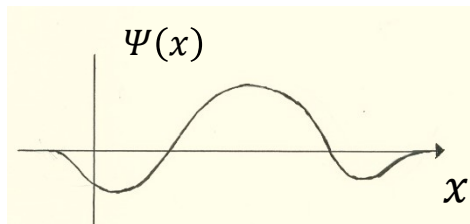


Wellenfunktionen und Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Die Gesamt-Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens ist 1.

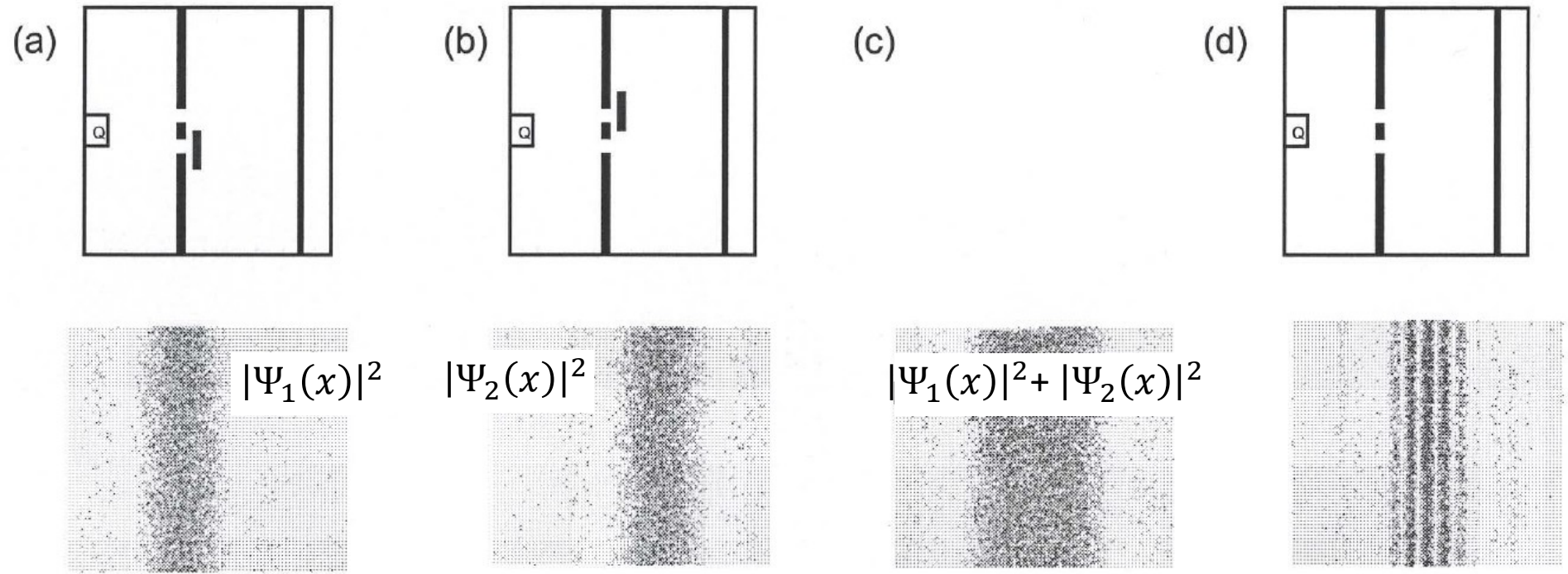
⇒ Teilchenwellen-Funktionen $\Psi(x)$ müssen **normierbar** sein.

D.h.: Jede Fläche unter $|\Psi(x)|^2$ - muss endlich sein.



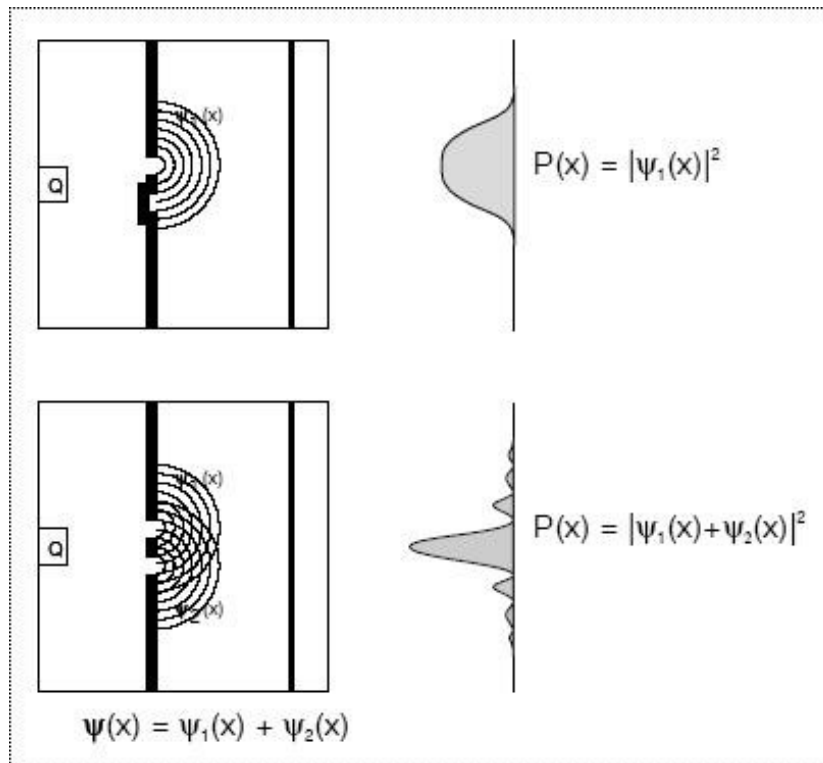
normierbare Welenfunktion

Das Überlagerungsprinzip beim Doppelspaltexperiment:



$$|\Psi_1(x) + \Psi_2(x)|^2$$

Überlagerung von Wahrscheinlichkeitswellen:



Überlagerung der Wellenfunktionen:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

(Superpositionsprinzip)

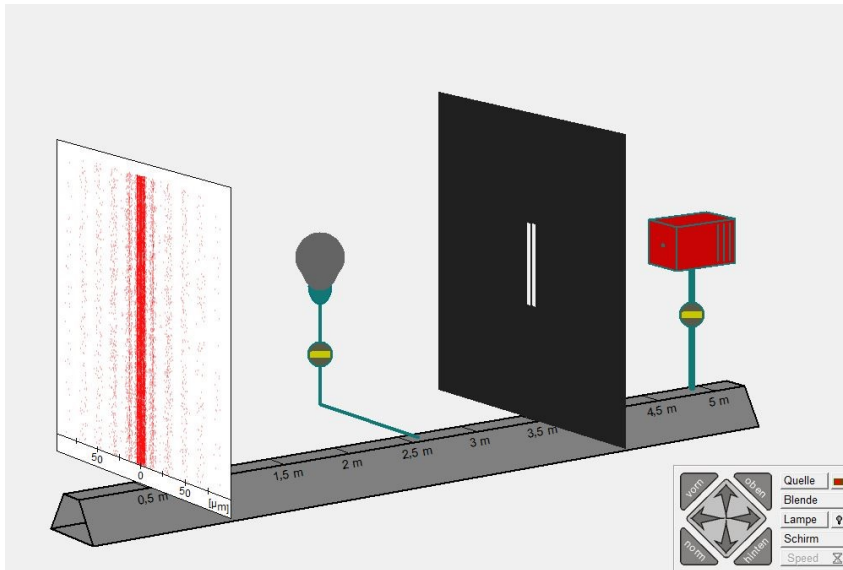
Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte:

$$\begin{aligned} |\Psi|^2 &= |\Psi_1 + \Psi_2|^2 \\ &= |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2 \cdot \Psi_1 \cdot \Psi_2 \end{aligned}$$

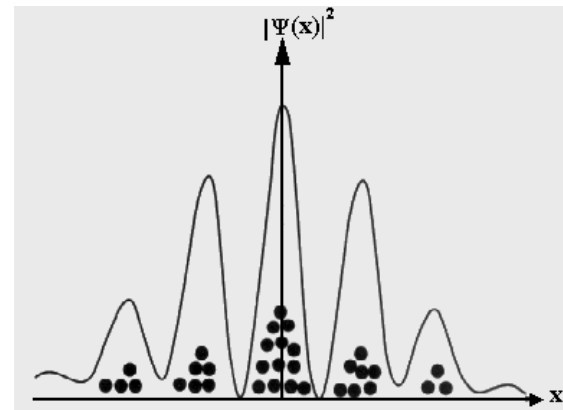
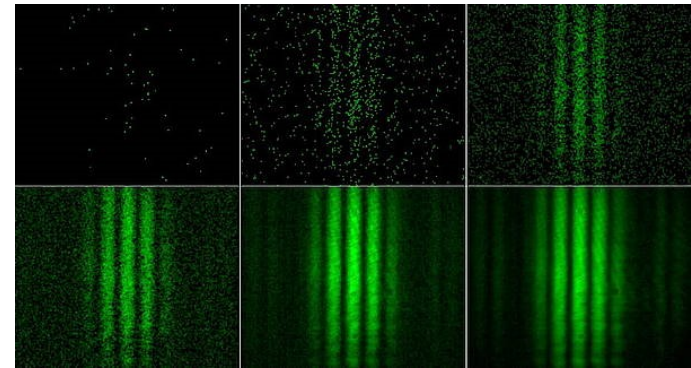
Interferenzterm:

$$2 \cdot \Psi_1 \cdot \Psi_2$$

Anwendung auf das Doppelspaltexperiment mit Elektronen:



Simulation: Doppelspaltexperiment



1) Die Hohlraumstrahlung: Geburt der Quantenmechanik

2) Der Welle-Teilchen-Dualismus

2.1) Teilcheneigenschaften elektromagnetischer Wellen

2.1.1) Der Lichtelektrische Effekt

2.1.2) Der Compton-Effekt

2.2) Welleneigenschaften von Teilchen

2.2.1) Interferenz von Lichtwellen

2.2.2) Die De Broglie-Hypothese

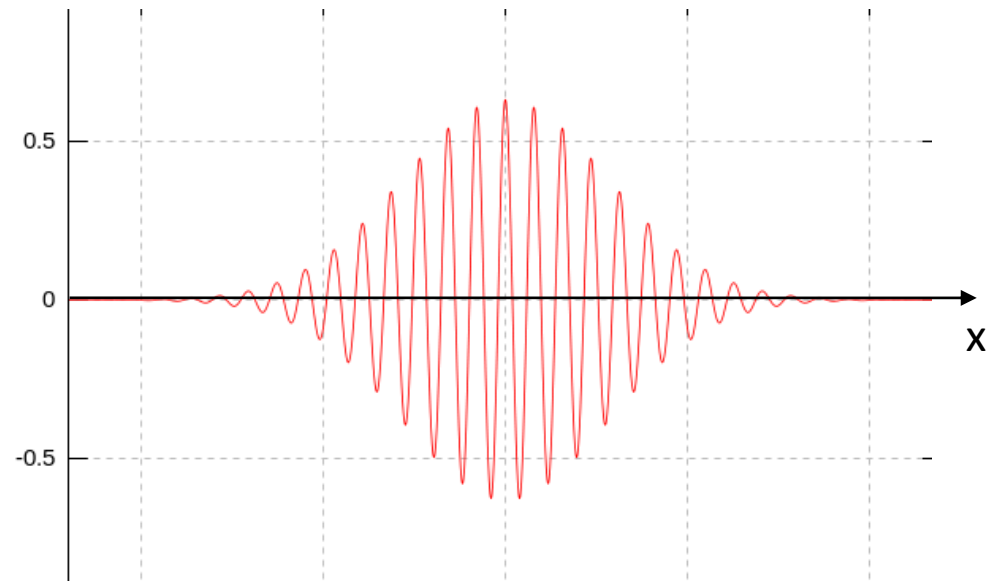
2.2.3) Elektronenbeugungsröhre und Doppelspalt

3) Wellenfunktionen

3.1) Physikalische Bedeutung der Wellenfunktion

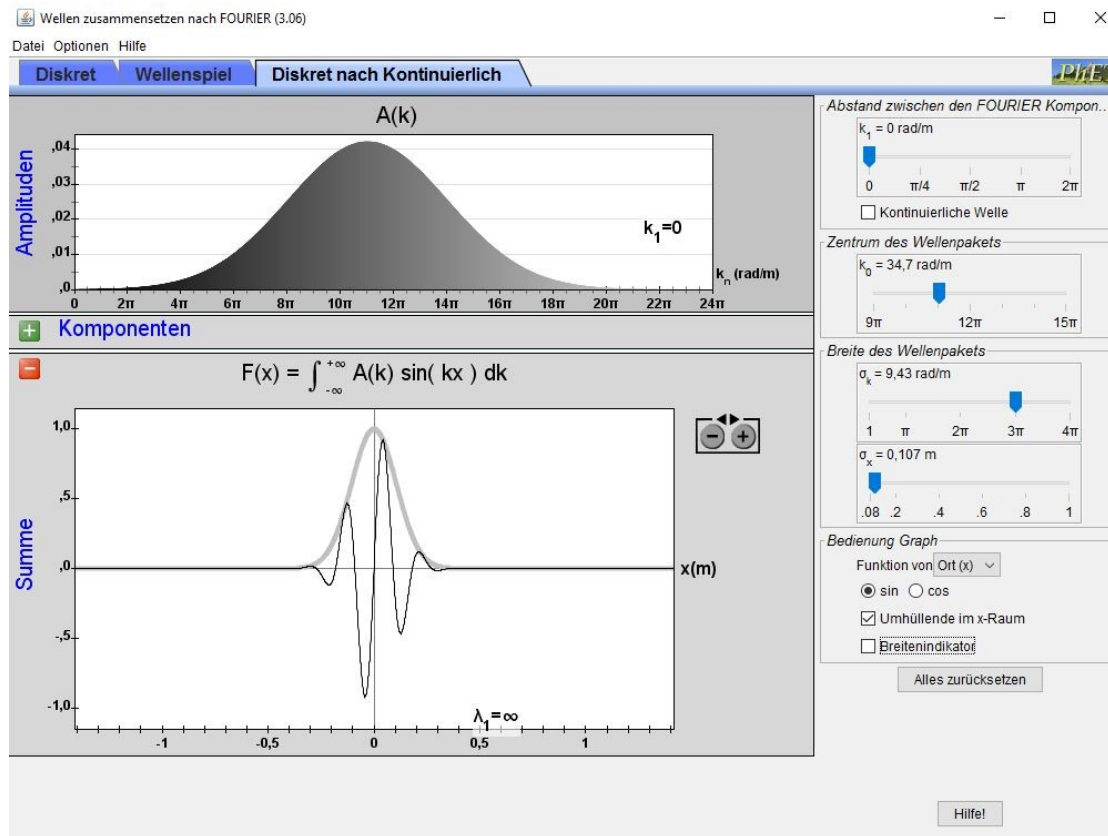
3.2) Harmonische Wellen und Wellenpakete

Wellenpaket:

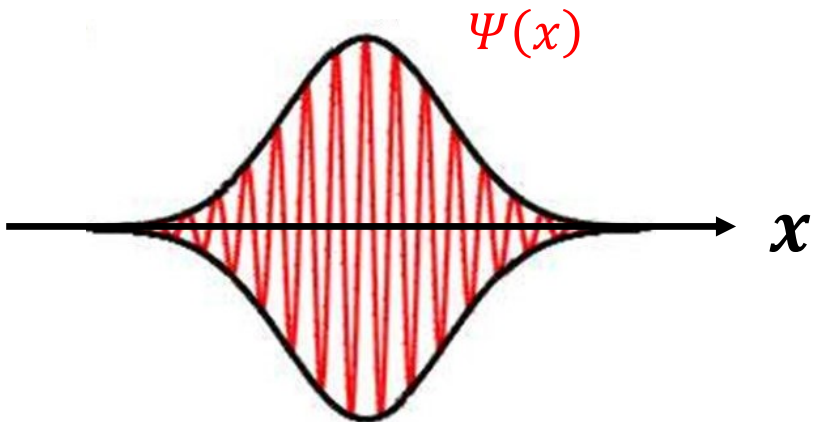


Wie erhält man Wellenpakete?

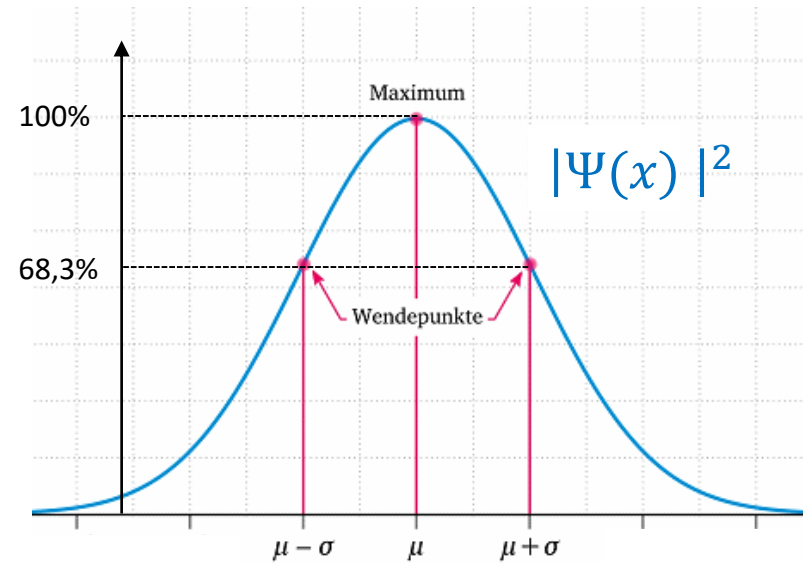
Zusammensetzen von Gaußschen Wellenpaketen
aus harmonischen Wellen:

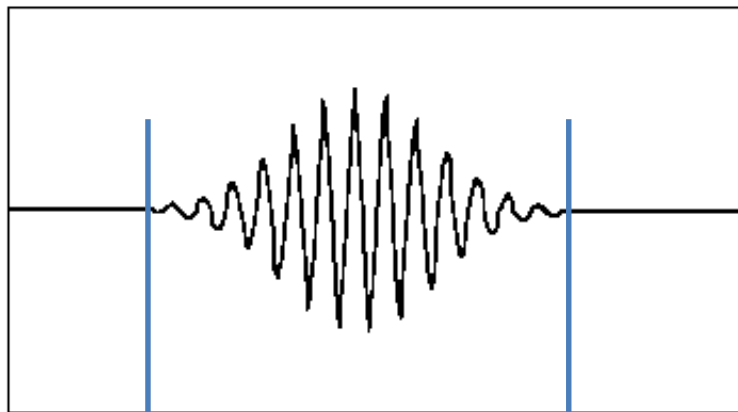


Gaußsches Wellenpaket

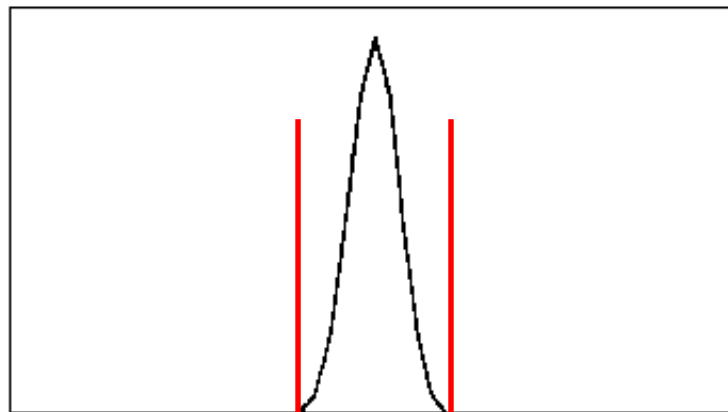


Gaußsche Glockenkurve

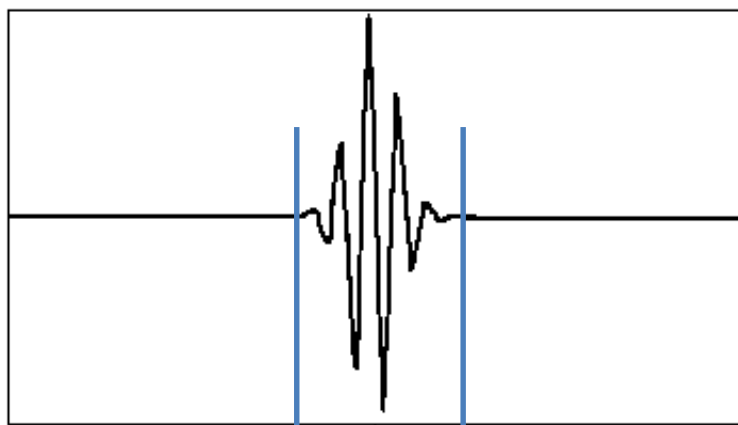




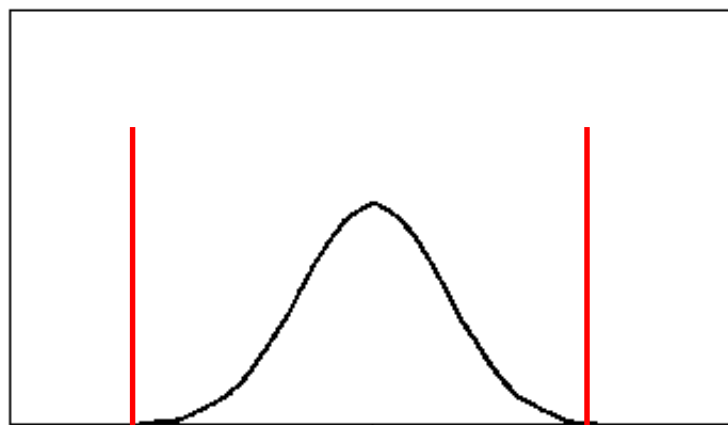
Δx



Δk



Δx



Δk

Komplementarität der Breite Δx eines Wellenpakets und der Breite Δk des Intervalls, aus dem die Wellenzahlen stammen:

Simulation



Die Breite Δx der Wellenpakete nimmt mit zunehmender Breite des Intervalls Δk ab (und umgekehrt).

$$\Delta x \cdot \Delta k \approx 1$$

Die Breiten Δx und Δk charakterisieren die Unschärfe bzw. Unbestimmtheit der Größen x und k .

1) Die Hohlraumstrahlung: Geburt der Quantenmechanik

2) Der Welle-Teilchen-Dualismus

2.1) Teilcheneigenschaften elektromagnetischer Wellen

2.1.1) Der Lichtelektrische Effekt

2.1.2) Der Compton-Effekt

2.2) Welleneigenschaften von Teilchen

2.2.1) Interferenz von Lichtwellen

2.2.2) Die De Broglie-Hypothese

2.2.3) Elektronenbeugungsröhre und Doppelspalt

3) Wellenfunktionen

3.1) Physikalische Bedeutung der Wellenfunktion

3.2) Harmonische Wellen und Wellenpakete

4) Die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation

4.1) Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation als fundamentales Konzept

Die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

Gemäß der De Broglie-Beziehung gilt: $\Delta p = \frac{h}{2\pi} \cdot \Delta k$

- gilt für alle Wellenfunktionen
- fundamentales Konzept der Quantenmechanik



Werner Heisenberg
1927



Werner Heisenberg

(1901 – 1976)

Nobelpreis 1932

1) Die Hohlraumstrahlung: Geburt der Quantenmechanik

2) Der Welle-Teilchen-Dualismus

2.1) Teilcheneigenschaften elektromagnetischer Wellen

2.1.1) Der Lichtelektrische Effekt

2.1.2) Der Compton-Effekt

2.2) Welleneigenschaften von Teilchen

2.2.1) Interferenz von Lichtwellen

2.2.2) Die De Broglie-Hypothese

2.2.3) Elektronenbeugungsröhre und Doppelspalt

3) Wellenfunktionen

3.1) Physikalische Bedeutung der Wellenfunktion

3.2) Harmonische Wellen und Wellenpakete

4) Die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation

4.1) Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation als fundamentales Konzept

4.2) Interpretation und Anwendungen der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation

Unbestimmtheitsrelation für Energie und Zeit:

Es gibt auch eine Unbestimmtheitsrelation für Energie und Zeit:

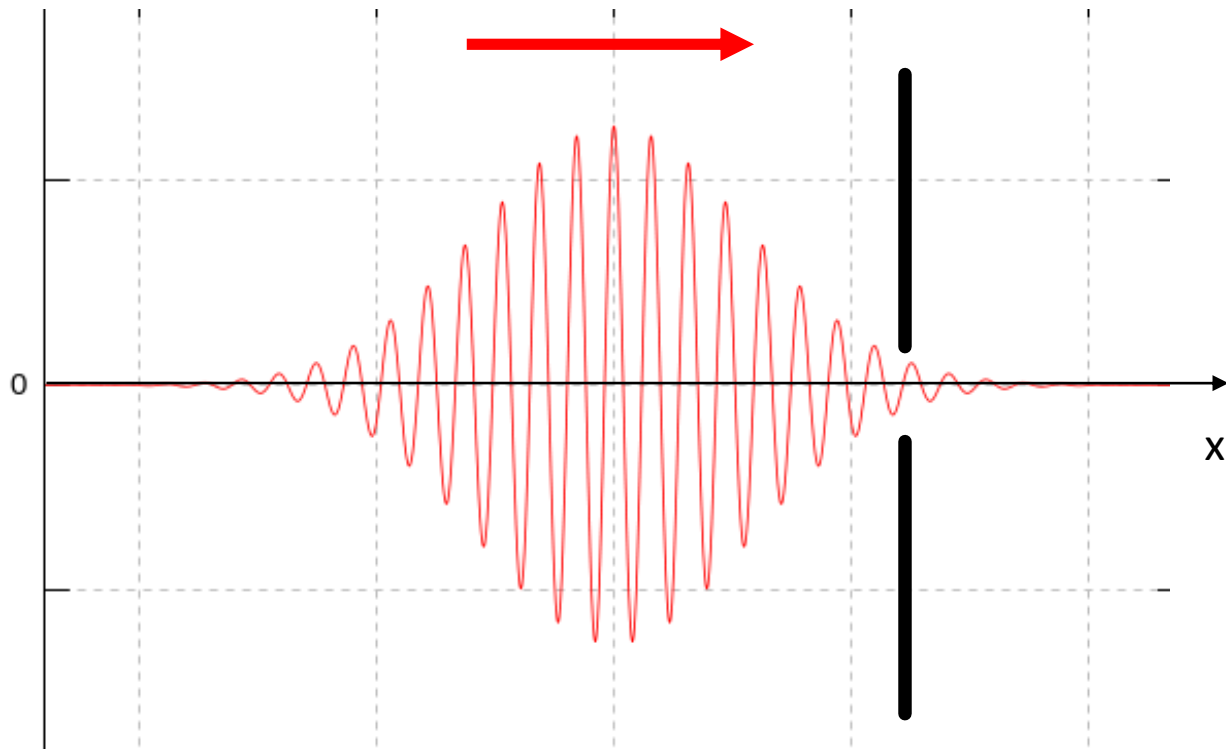
$$\Delta E \cdot \Delta T \approx \frac{h}{2\pi}$$

Dabei ist T eine Messgröße mit der Dimension einer Zeit.

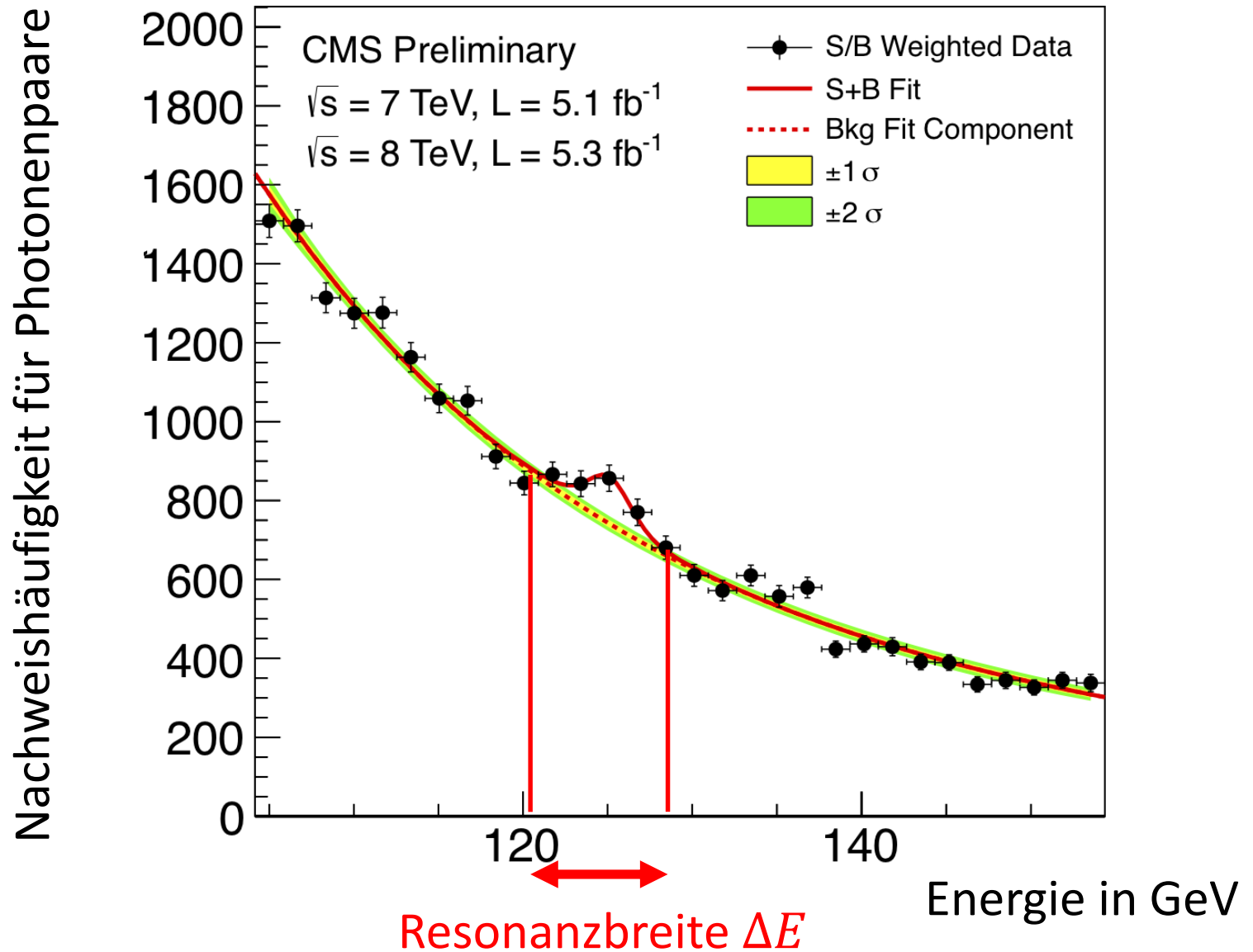
Beispiele:

- Durchlaufzeit eines Wellenpakets
- mittlere Lebensdauer eines Teilchens

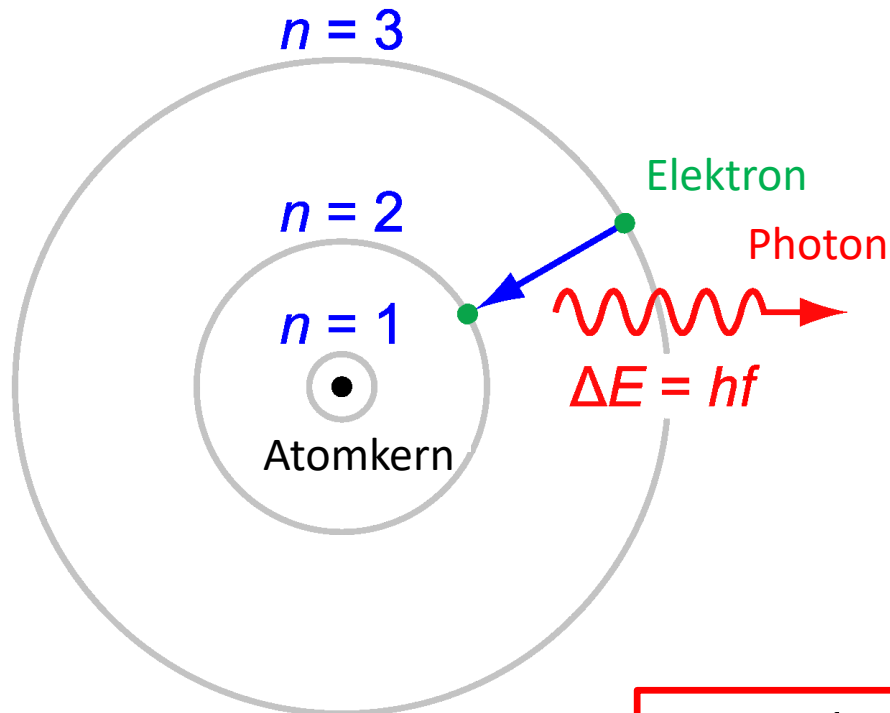
Durchlaufzeit eines Wellenpakets:



Nachweis des Higgs-Teilchens:



Bohrsches Atommodell (Wassertoffatom):



$$E_n \sim \frac{1}{n^2}$$



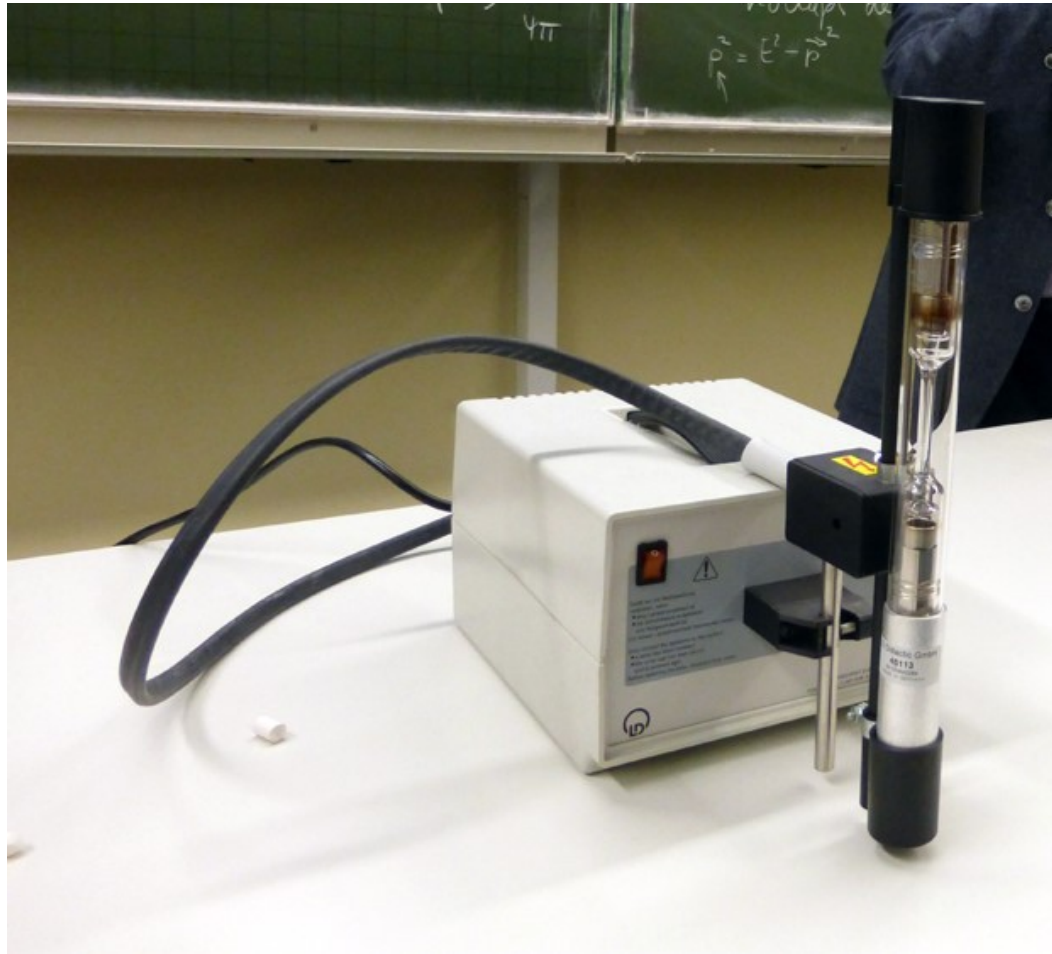
Niels Bohr

(1885 – 1962)

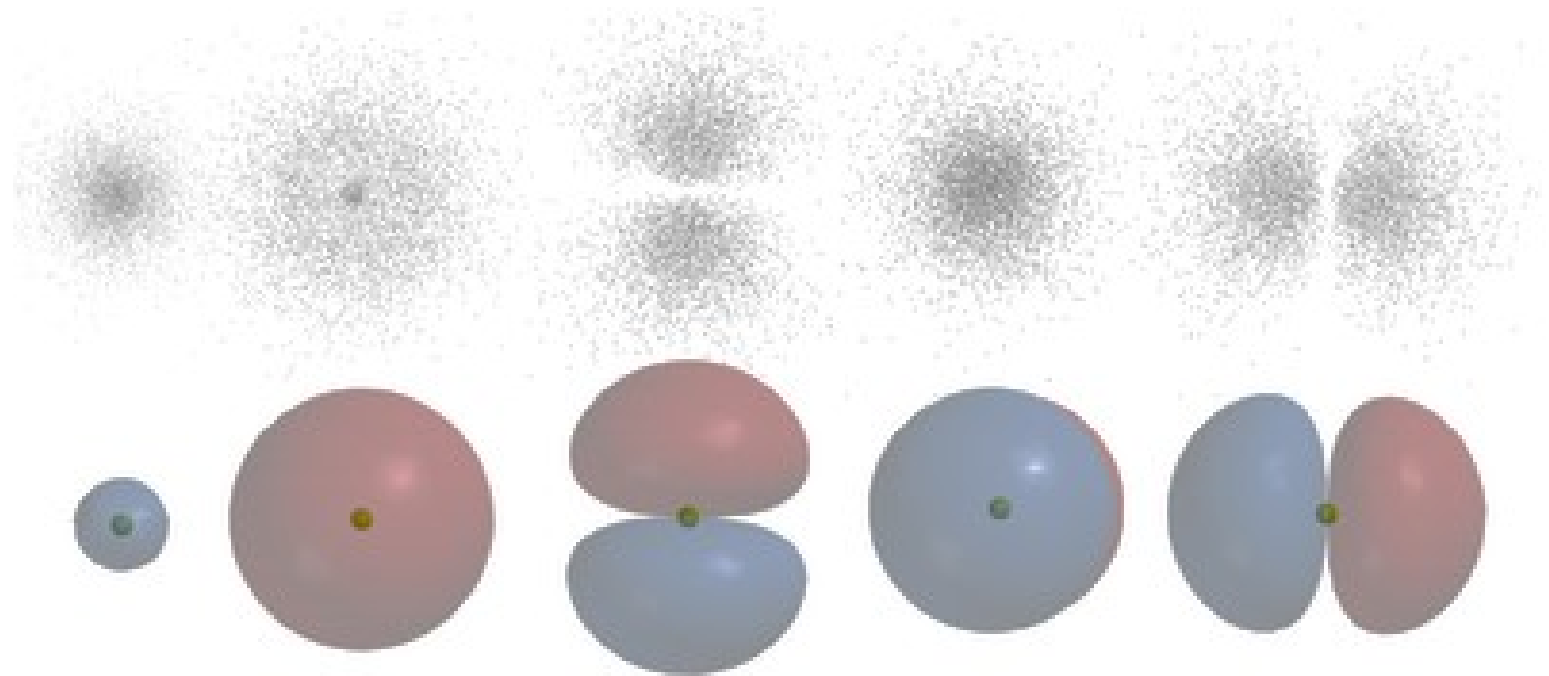
Nobelpreis 1922



Experiment: Diskretes Energiespektrum des Wasserstoffatoms (Balmerlampe)



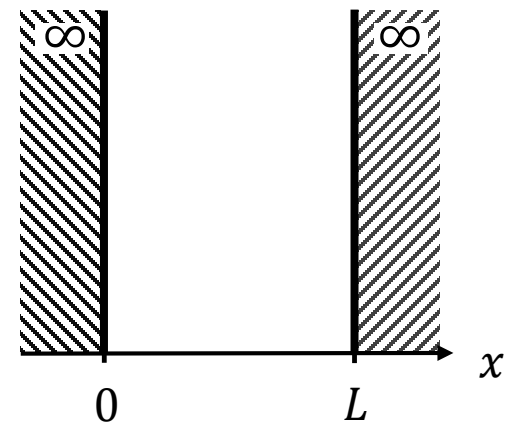
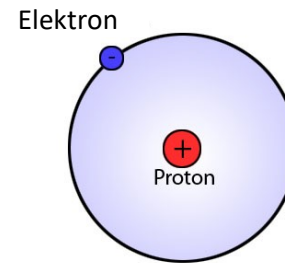
Ergebnis der Quantenmechanik: Orbitale des Wasserstoffatoms:

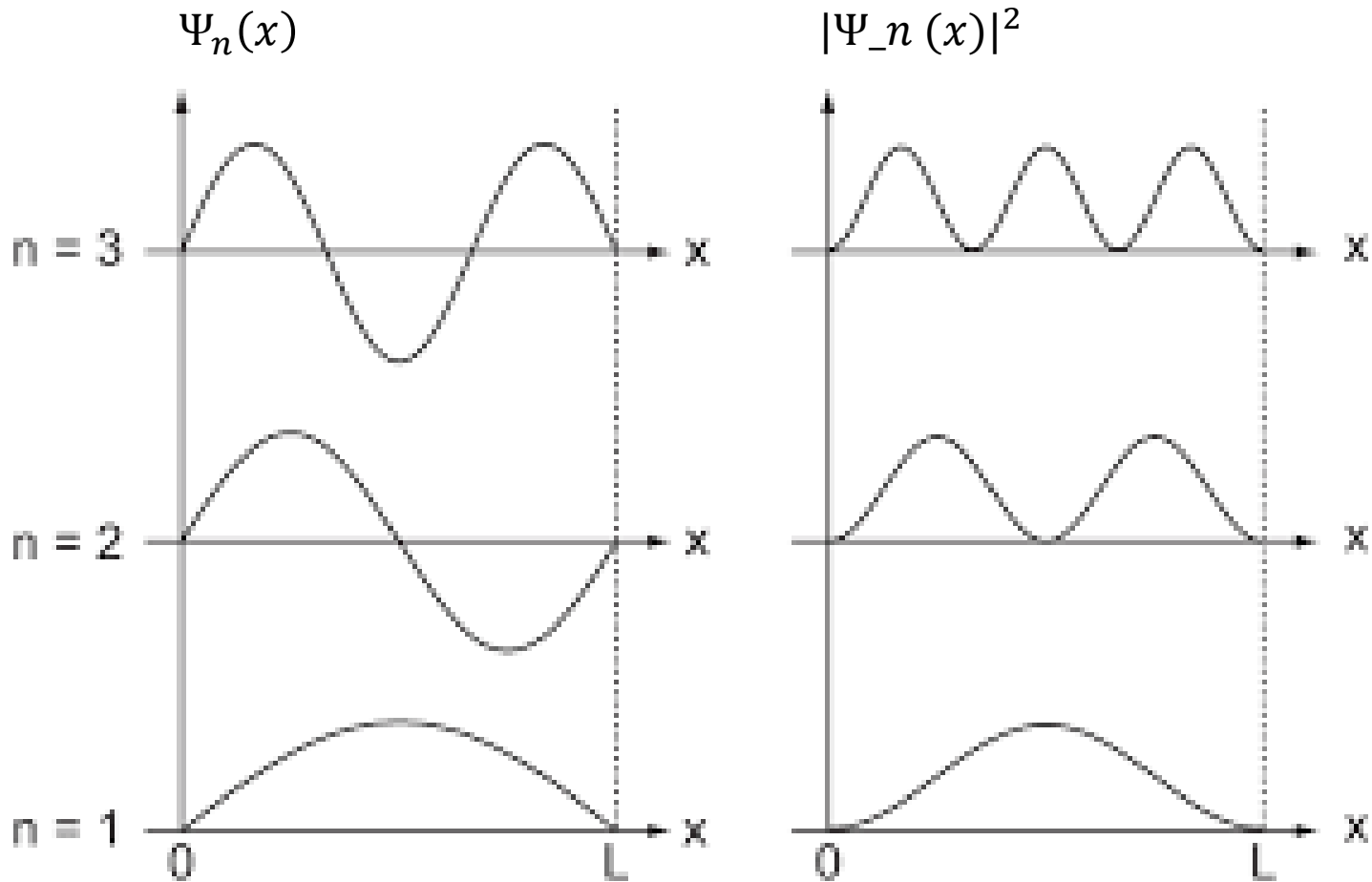


Die Orbitale beschreiben die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons im Raum um den Atomkern.

Anwendung der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation auf Quantensysteme mit gebundenen Teilchen:

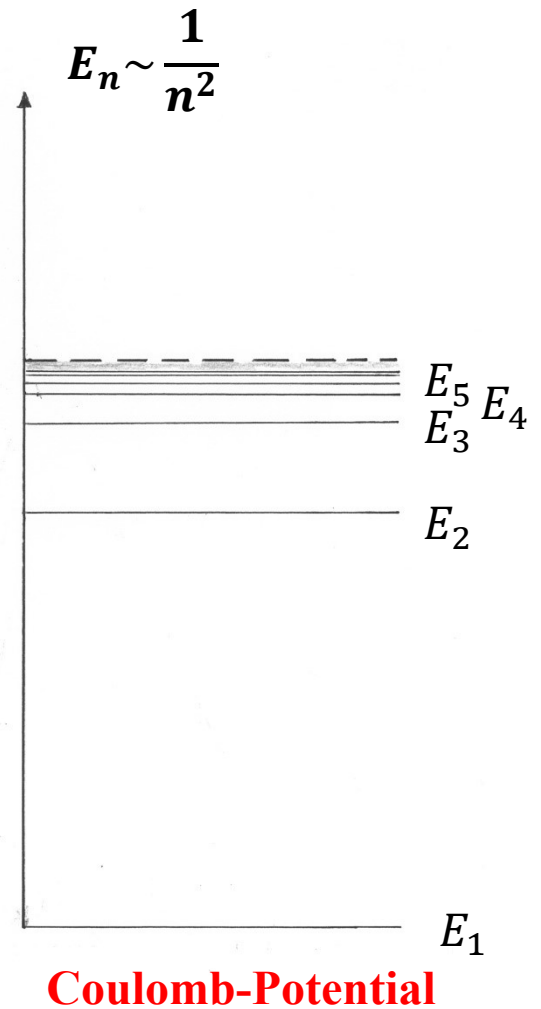
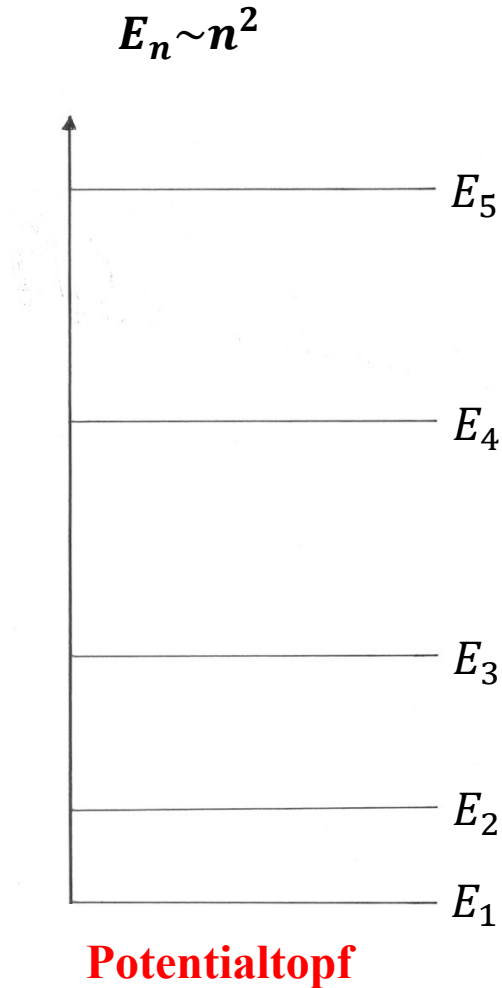
- **Wasserstoffatom**
- **Atomkern**
- **Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden**
- **Abschätzung der Größenordnungen des Energieinhalts von Quantensystemen mit gebundenen Teilchen**



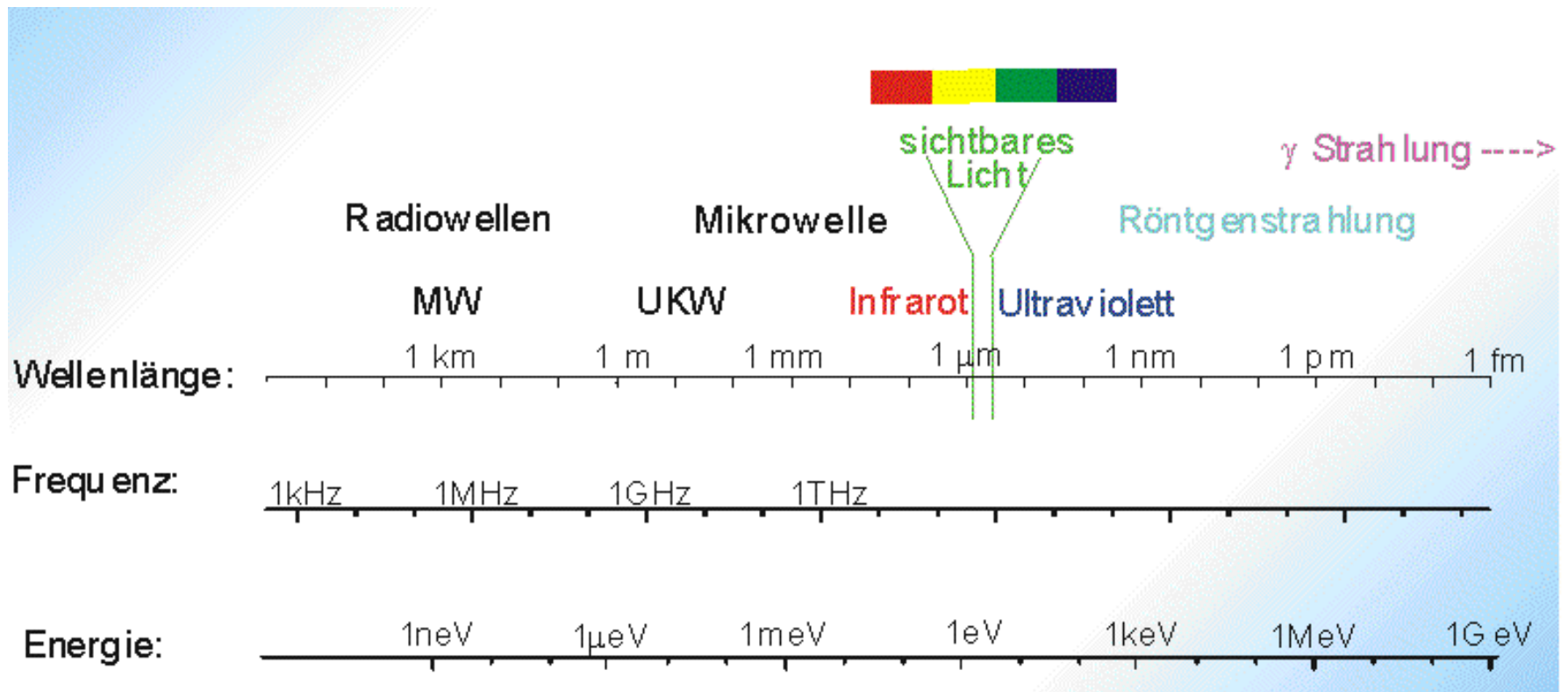


Stehende Wellen in einem unendlich hohen Potentialtopf

Diskrete Energieniveaus von gebundenen Systemen:



Energiebereiche der verschiedenen Strahlungsarten:



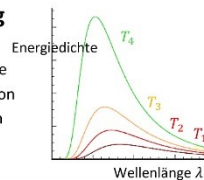
Von der kosmischen Hintergrundstrahlung zur Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation

Hohlraumstrahlung

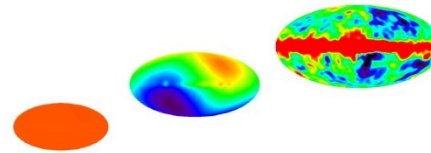
Max Planck (1900)

- Spektrale Energiedichte
- Emission und Absorption der Energie in Quanten

$$E = h \cdot f$$



„Merkblatt“



Der Welle-Teilchen-Dualismus

Teilcheneigenschaften elektromagnetischer Wellen

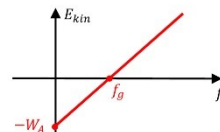
Lichtelektrischer Effekt

Albert Einstein (1905)

Auslösung von Elektronen aus Metalloberflächen durch Bestrahlung mit Licht

Lichtquantenhypothese

- Quantisierung der Lichtenergie
- Hypothese von Lichtquanten mit der Energie $E_\gamma = h \cdot f$



$$E_{kin} = h \cdot f - W_A$$

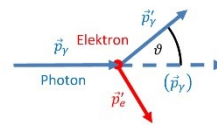
Compton-Effekt

Arthur Compton (1922)

Streuprozess von Photonen an Elektronen

Energie des Photons: $E_\gamma = h \cdot f$

Impuls des Photons: $p_\gamma = \frac{h}{\lambda}$



$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e \cdot c} (1 - \cos \vartheta)$$

Welleneigenschaften von Materieteilchen

De Broglie-Hypothese

Louis De Broglie (1924)

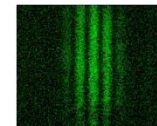
Wellenlänge eines Materieteilchens:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Frequenz f eines Materieteilchens:

$$E = h \cdot f$$

- Elektronenbeugungsröhre
- Doppelspaltexperimente mit Elektronen



Teilchenwellen

Max Born (1926)

Wahrscheinlichkeitsinterpretation

- Wellenfunktion $\Psi(x)$
- Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x)|^2$
- Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\Psi(x)|^2 \cdot \Delta x$

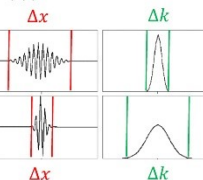
Eigenschaften von klassischen Wellen:

- Überlagerung harmonischer Wellen
- Wellenpakete

Komplementarität der Breiten

im Ort x und in der Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$\Delta x \cdot \Delta k \approx 1$$



Die Unbestimmtheitsrelation

Werner Heisenberg (1927)

Komplementarität der Unbestimmtheiten Δx im

Ort und $\Delta p = \frac{h}{2\pi} \cdot \Delta k$ im Impuls

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

Anwendungen auf Quantensysteme mit gebundenen Teilchen:

- Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden
- Atome und Atomkerne

